ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΟΡΙΩΝ

❶ Πεπερασμένα όριο στο x_0

❷ Μη πεπερασμένα όριο στο x_0

❸ Όρια στο άπειρο

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΟΡΙΑ ΣΤΟ x_0

Άσκηση 87

Σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετάσετε εαν έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου:

i. $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{36-x^2}$

ii. $\lim\limits_{x\to 6}\sqrt{36-x^2}$

iii. $\lim\limits_{x\to 6}\left(\sqrt{36-x^2}+\sqrt{x(x-1)(x-6)}\right)$

Άσκηση 88

Να υπολογίσετε κάθε ένα από τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+x^2-2x}{x^4-16}$

ii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-6x+8}$

iii. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x^2+x-2}-\dfrac{x}{x^3-1}\right)$

Άσκηση 89

Να υπολογίσετε κάθε ένα από τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-\sqrt{6-x}}$

ii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x+2}-\sqrt{3x}}{\sqrt{x+6}-2\sqrt{x}}$

iii. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\left(x^2-16\right)^2}{x\sqrt{x}-2x-4\sqrt{x}+8}$

iv. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

v. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$

vi. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x+2}-1}{\sqrt{x+5}-2}$

vii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}-3}{x^2-1}$

Άσκηση 90

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}+4a, & x<1\\ x^2-x+a^2+\beta^2+3, & x\geq 1\end{cases}$.

Να υπολογίσετε τα $a,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Άσκηση 91

Να υπολογίσετε κάθε ένα από τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-3|-|x-1|}{x^2-2x}$

ii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3|x-1|+2|x-4|-7}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}$

iii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x^5+x^3-5|-|x^4+x-5|}{x-1}$

iv. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x-3|+2x-6}{x^2-9}$

v. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x^2-1|+x^2-x}{|x^2+2x-3|-x+1}$

vi. $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{|x^3-3x+2|+x^2-1}{\sqrt{x^2-2x+1}}$

Άσκηση 92

Να υπολογίσετε κάθε ένα από τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\left(3+\eta\mu x\right)}{\left(x+\eta\mu x\right)^2}$

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$

iii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}-1\right)}$

iv. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}{x^3}$

v. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2-\eta\mu^2 x}{4x\varepsilon\varphi x+\eta\mu^2 x}$

vi. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu^3 x}{2\cdot x\cdot\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}$

Άσκηση 93

Να υπολογίσετε κάθε ένα από τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\dfrac{\pi}{2}-x}$

ii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(\pi x\right)-1}{\left(x-2\right)^2}$

iii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{\eta\mu(x-2)}$

iv. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu\dfrac{x}{2}}{\sqrt{x+1}-1}$

v. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu\left(\eta\mu x\right)}{x^2+x}$

Άσκηση 94

Αν για κάθε $x \in (-1,\ 1)$ ισχύει $x+1 \le f(x) \le \dfrac{1}{1-x}$, τότε

i. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

ii. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1$.

iii. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1+\eta\mu x}{x^2-x}$.

iv. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+\sigma\upsilon\nu x-2}{x^2-2x}$.

Άσκηση 95

Έστω f, g συναρτήσεις, για τις οποίες για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει:

$\lim\limits_{x\to 2} g(x)=\ell$ και $\left|f(x)-g(x)\right| \le (x-2)^2\left|g(x)\right|$.

Να δείξετε ότι:

i. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\ell$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-g(x)}{x-2}=0$.

Άσκηση 96

Για μια συνάρτηση f, ορισμένη στο $\mathbb{R}^+$, ισχύει ότι: $2\sqrt{x}+1 \le f(x) \le x+2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^+$.

Α) Να αποδείξετε:

i. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-3}{x-1}=1$

Β) Στη συνέχεια να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

iii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-3}{\sqrt{x^2+3}-2}$ **iv.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(f(x)\right)^2-9}{x-1}$

v. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{f(x)-1}-\sqrt{2}}{x-1}$ **vi.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left|f(x)-2\right|-1}{x^2-1}$

Άσκηση 97

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $4x-5\le f^2(x)-2f(x)\le 2x^2-3$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Άσκηση 98

Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2}{|x|}\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{2}{x}\right)$ **iii.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\eta\mu\left(\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}\right)\right)$

iv. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(7x^2+|x|\right)\eta\mu\dfrac{7}{x}+7\right]$

Άσκηση 99

Έστω οι συναρτήσεις *f*, *g* με $g(x)=2x^3-7x^2+7x-2$ και $f(x)=|(x-\alpha)\cdot g(x)|$.

Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$, ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$.

Άσκηση 100

i. Για μια συνάρτηση *f*, ορισμένη στο $\mathbb{R}$ ισχύει: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-x^2}{x^2-4x+3}=2$.

Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\cdot f(x)-1}{\sqrt{x}-1}$.

ii. Για μια συνάρτηση *g*, ορισμένη στο $\mathbb{R}$ ισχύει: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)-x}{x-1}=7$.

Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{g(x)+3}-2}{\sqrt{x}-1}$.

Άσκηση 101

Για μια συνάρτηση f, ορισμένη στο $\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f^2(x)-2xf(-2x)+5x^2=x\cdot \eta\mu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και ότι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=k$. Να βρείτε το $k\in\mathbb{R}$.

Άσκηση 102

i. Αν η συνάρτηση f είναι περιττή και ισχύει: $\lim\limits_{x\to 2}\left[f(x)-1+x\right]=2$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$.

ii. Αν η συνάρτηση f είναι άρτια και ισχύει $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-3}{x-2}=4$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$.

iii. Αν για την συνάρτηση f ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=7$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2} f\left(3x-1\right)$.

iv. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $x+f(x)=f(a-x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και ότι $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+2x-a\right]=1$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Άσκηση 103

Δίνονται δύο μιγαδικοί αριθμοί $z, w\in\mathbb{C}^*$, καθώς και η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\begin{cases}2x+|z|+|w| \ , & x\le 0\\ x^2+3|w|x+|z+w| \ , & x>0\end{cases}.$$

Αν είναι γνωστό ότι υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\dfrac{z}{w}$ είναι πραγματικός.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΕ ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΟΡΙΑ ΣΤΟ x_0

Άσκηση 104

Να υπολογίσετε κάθε ένα από τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5x+1}{x^2-6x+9}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-3}{x^3-3x-2}$

iii. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{x-2}{\eta\mu x-1}$ **iv.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|2-x|-3}{|2x-9|-|4x-x^2|}$

Άσκηση 105

Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\left(\sqrt{x}-2\right)^3}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-3x^2+3x-1}$ **iii.** $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-5}{x-6\sqrt{x}+9}$

iv. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x+1}{1-\sigma\upsilon\nu^3 x}$ **v.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+|x|}{|x+1|-2}$ **vi.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x^3}}$

vii. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{\eta\mu^2 x+\eta\mu x+1}{2\eta\mu^2 x-3\eta\mu x+1}$ **viii.** $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{x^2-3}{\ln x-1}$

Άσκηση 106

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=+\infty$.

Να υπολογίσετε κάθε ένα από τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{f(x)}$

ii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f^2(x)-3f(x)}{f(x)+2}$

iii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4f^3(x)-3f(x)+1}{2f^3(x)+5f^2(x)-6}$

Άσκηση 107

Να βρείτε για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$, κάθε ένα από τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+\lambda x+2}{x^2-4x+4}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-3}{x^2+\lambda x+1}$

Άσκηση 108

Αν $f(x)=\dfrac{(2\mu-1)x^3-3\mu x^2+\mu^2+3}{x^2-4x+4}$, να βρείτε τις τιμές του $\mu\in\mathbb{R}$, ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ και να είναι **πραγματικός αριθμός**.

Άσκηση 109

Να βρείτε τις τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ώστε $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+\lambda x+\mu}{x^2+3x+2}=m\in\mathbb{R}$. Στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή του ορίου.

Άσκηση 110

Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ με $f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha x+\beta, & x>1 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+3}-(\alpha-2\beta)}{x-1}, & x<1 \end{cases}$.

Άσκηση 111

Δίνονται δύο μιγαδικοί αριθμοί *z*, *w*, για τους οποίους γνωρίζουμε ότι τα όρια

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|z|x^3+3x^2-8x+3}{x-1}$ και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|w-4|x^3+|w+4|x^2-8x-2}{x-1}$ υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί.

i. Να προσδιορίσετε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών *z* και *w* στο μιγαδικό επίπεδο.

ii. Να βρείτε την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το μέτρο του $|z-w|$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΟΡΙΩΝ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Άσκηση 112

Να υπολογίσετε κάθε ένα από τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+5}+x+5\right)$

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+5}+x+5\right)$

iii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+6x+10}-\sqrt{x^2+2x+3}\right)$

iv. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+6x+10}-\sqrt{x^2+2x+3}\right)$

v. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+1}-\sqrt[3]{x^3-2x}\right)$

vi. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-x}-\sqrt{9x^2+3}+x\right)$

vii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-x}-\sqrt{9x^2+3}-ax\right)$

viii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{9x^2+5x}-\sqrt{16x^2-7}\right)$

Άσκηση 113

Να υπολογίσετε κάθε ένα από τα παρακάτω όρια για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$:

i. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{16x^2-7x+13}+\lambda^2 x\right)$

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\lambda^2-3\lambda\right)x^3+\lambda x^2+\left(\lambda+3\right)x-5}{\left(\lambda^2-9\right)x^2+\left(1-\lambda\right)x-2}$

Άσκηση 114

Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε:

i. η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{\left(2^{\alpha}-1\right)\cdot x^3+2^{\beta}x^2-x+1}{x^2+1}$ να έχει $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$,

ii. η συνάρτηση g με $g(x)=\dfrac{x^3+2x+1}{x^2+1}-(\alpha\cdot x-\beta)$ να έχει $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=2$.

Άσκηση 115

Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\cdot f(x)+x-2}{x+3}=4$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Άσκηση 116

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\eta\mu\dfrac{1}{x}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$ **iii.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$

iv. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\eta\mu^2\dfrac{1}{x}\right)$ **v.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\cdot\sigma\upsilon\nu(2x+1)\right)$ **vi.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\eta\mu x-x}{\eta\mu x+x}\right)$

vii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\eta\mu^3 x-\sigma\upsilon\nu 3x}{5x+6}$ **viii.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}-2x^2}{6x^2+1}$

ix. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x}{x+2}\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}$ **x.** $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{2x^2-5}{x+2013}}\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}$

Άσκηση 117

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-2^{x+1}}{e^{x-1}+2^x}$,

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-2^{x+1}}{e^{x-1}+2^x}$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^{x+1}-\alpha^x}{\alpha^{x+2}+2^x}$, $\alpha>0$,

iv. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^{x+1}-\alpha^x}{\alpha^{x+2}+2^x}$, $\alpha>0$

Άσκηση 118

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-\ln(\sqrt{x^2+x+1})\right)$

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\ln(e^x+1)\right)$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(x+\eta\mu x\right)-2\ln x\right)$

iv. $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\ln\left(\ln x\right)+2014\right)$

Άσκηση 119

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει:

$\left|\left(1+x^4\right)\cdot f\left(x\right)-2x^2\right|\le x^2$ για κάθε $x>0$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

Άσκηση 120

Δίνεται ο μιγαδικός $z=x+\dfrac{i}{x+i}$, $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{Im}(z)\le\dfrac{1}{2}$

ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\mathrm{Im}(z)\cdot\eta\mu x\right]$

iii. Αν $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)$, να βρείτε τον θετικό ακέραιο ν, τέτοιο ώστε να ισχύει $z^{2\nu}=2^{-9}\cdot i$

Άσκηση 121

Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f^3(x)+f(x)=2e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να βρείτε την τιμή $f(0)$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

iii. Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iv. Να αποδείξετε ότι f είναι γνησίως αύξουσα

v. Να λύσετε την ανίσωση $\ln f(x)<0$.

vi. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Άσκηση 122

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z=\alpha+\beta i$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, για τον οποίο ισχύει ότι $|z|=1$, καθώς και η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=|2x+z|+|x+z|$.

i. Να γράψετε τον τύπο της f με την βοήθεια του α.

ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

iii. Αν ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x\right)=6$, να βρείτε το α.