

ΘΕΜΑ Α-ΘΕΩΡΙΑ

1. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;
2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής ;
3. Να διατυπωθεί το θεώρημα που αφορά τη συνέχεια και τις πράξεις μεταξύ συναρτήσεων.
4. Τι ισχύει για τη συνέχεια σύνθετης συνάρτησης;
5. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο ανοικτό διάστημα (α, β) και πότε στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;
6. Να διατυπωθεί το Θεώρημα Bolzano.
7. Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Bolzano
8. Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.
9. Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών.
10. Να διατυπωθεί το Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.
11. Να συμπληρώσετε το σύνολο τιμών σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
 - i. Αν f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$ τότε $f([\alpha, \beta]) = [\dots, \dots]$
 - ii. Αν f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο (α, β) τότε $f((\alpha, \beta)) = (\dots, \dots)$
 - iii. Αν f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta)$ τότε $f([\alpha, \beta)) = [\dots, \dots)$
 - iv. Αν f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, \beta]$ τότε $f((\alpha, \beta]) = (\dots, \dots]$
 - v. Αν f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$ τότε $f([\alpha, \beta]) = [\dots, \dots]$
 - vi. Αν f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο (α, β) τότε $f((\alpha, \beta)) = (\dots, \dots)$
 - vii. Αν f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta)$ τότε $f([\alpha, \beta)) = [\dots, \dots)$
 - viii. Αν f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(\alpha, \beta]$ τότε $f((\alpha, \beta]) = (\dots, \dots]$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Όταν λέμε ότι μία συνάρτηση είναι συνεχής, εννοούμε ότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, δηλαδή **δεν έχει νόημα** να εξετάσουμε αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής ή όχι σε ένα σημείο x_0 που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της.
2. Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της τότε είναι συνεχής και σε κάθε υποσύνολό του.
3. Είναι λάθος να λέμε ότι μια συνάρτηση που είναι συνεχής στο σύνολο A έχει γραφική παράσταση που δεν διακόπτεται. Η συνέχεια είναι από τις βασικές ιδιότητες μιας συνάρτησης που αναφέρεται στα στοιχεία του πεδίου ορισμού της. Παράδειγμα η $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ είναι συνεχής, ενώ η γραφική της παράσταση αποτελείται από δυο κλάδους.
4. Μια συνάρτηση f **δεν είναι συνεχής** σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν:

- Δεν υπάρχει το όριο της στο x_0 ή
- Υπάρχει το όριο της στο x_0 , αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της, $f(x_0)$, στο σημείο x_0 .

5. Μια συνάρτηση f είναι **συνεχής στο** x_0 , αν και μόνο αν,

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$ ή
- $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ ή $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + \kappa h) = f(x_0), \kappa \neq 0$ ή
- $\lim_{h \rightarrow 1} f(x_0 \cdot h) = f(x_0), x_0 \neq 0$

6. Αν η f είναι ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ τότε για να είναι συνεχής στα άκρα α, β θα πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta).$$

7. Αν οι συναρτήσεις $f \pm g, f \cdot g, \frac{f}{g}, |f|$ είναι συνεχείς στο x_0 τότε δεν σημαίνει πάντα, ότι οι f, g είναι

$$\text{συνεχείς στο } x_0. \quad \text{Π.χ. } f(x) = \begin{cases} 2, & x \geq 0 \\ -2, & x < 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} -2, & x \geq 0 \\ 2, & x < 0 \end{cases}.$$

8. Αν δίνεται ότι μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A είναι συνεχής στο x_0 τότε συμπεραίνουμε τα εξής:

- Το $x_0 \in A$ • Υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ • Το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός • $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

9. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο x_0 τότε και οι $\kappa \cdot f \pm \lambda \cdot g$ είναι συνεχείς στο x_0 με κ, λ πραγματικούς αριθμούς.

10. Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ αν τουλάχιστον ένα από τα πλευρικά όρια απειρίζεται

$$\text{θετικά ή αρνητικά.} \quad \text{Π.χ. } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-3)^2}, & x \in [0, 3) \\ 1, & x = 3 \end{cases}.$$

11. Αν έστω και μία από τις προϋποθέσεις του Θ. Bolzano δεν ισχύουν τότε δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα. Δηλαδή αν:

- f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ αλλά ισχύει $f(\alpha)f(\beta) > 0$ τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ μπορεί να έχει ή και να μην έχει ρίζα στο (α, β) .
- η f δεν είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(\alpha)f(\beta) < 0$, τότε δεν είναι βέβαιο ότι θα υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της $f(x) = 0$ στο (α, β) .

12. Το αντίστροφο του Θ. Bolzano δεν ισχύει. Π.χ. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \geq 0 \\ 3x, & x < 0 \end{cases}.$

Για την f δεν ισχύει το Θ. Bolzano στο $[-3, 3]$ όμως η $f(x) = 0$ έχει ρίζα στο $(-3, 3)$.

13. • Στις ασκήσεις που ζητείται να αποδείξουμε ότι η $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) , εξετάζουμε αν ισχύει το Θ. Bolzano για την f στο $[\alpha, \beta]$ ή σε κάποιο υποσύνολό του.

- Αν δεν δίνεται το διάστημα στο οποίο ανήκει η ρίζα, προσπαθούμε δίνοντας τιμές να βρούμε δυο ετερόσημες.

14. Υπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας στο $[\alpha, \beta]$.

Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha)f(\beta) \leq 0$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Εξετάζουμε τις δύο περιπτώσεις:

- Αν $f(\alpha)f(\beta) = 0$ τότε $f(\alpha) = 0$ ή $f(\beta) = 0$, δηλαδή α ή β είναι ρίζα της εξίσωσης.
- Αν $f(\alpha)f(\beta) < 0$ τότε εφαρμόζεται το θεώρημα του Bolzano, οπότε υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α, β) .

Άρα σε κάθε περίπτωση υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο $[\alpha, \beta]$.

15. Για να αποδείξουμε ότι η $f(x) = 0$ έχει n τουλάχιστον ρίζες σε ένα διάστημα (α, β) , χωρίζουμε το $[\alpha, \beta]$ σε n κατάλληλα υποδιαστήματα, τα οποία να μην έχουν κοινά εσωτερικά σημεία και εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano για την f σε καθένα από τα διαστήματα αυτά.

16. Αν η εξίσωση είναι της μορφής $f(x) = g(x)$, θεωρούμε την $h(x) = f(x) - g(x)$.

17. Αν θέλουμε να δείξουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο του (α, β) , αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) .

18. Στις ασκήσεις που ζητείται να αποδείξουμε ότι η $f(x) = 0$ έχει μια μόνο ρίζα στο (α, β) , τότε πρώτα θα αποδείξουμε ότι η $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) και μετά ή δείχνουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη ή χρησιμοποιούμε απαγωγή σε άτοπο.

19. Αν η συνεχής συνάρτηση f ορίζεται στο διάστημα Δ , τότε η εικόνα του Δ μέσω της f (δηλαδή η $f(\Delta)$) θα είναι διάστημα, δηλαδή δεν είναι ένωση διαστημάτων, με την προϋπόθεση ότι η f δεν είναι σταθερή.

Αν η f είναι σταθερή συνάρτηση τότε το $f(\Delta)$ είναι ένα σημείο (μονοσύνολο).

20. Το αντίστροφο του Θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών δεν ισχύει κατ' ανάγκη, δηλαδή αν μία συνάρτηση f ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$, παίρνει κάθε τιμή μεταξύ του $f(\alpha)$ και του $f(\beta)$, δεν σημαίνει ότι αυτή είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

21. Η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης σε διάστημα Δ είναι μία συνεχής γραμμή.

22. Αν η f ΔΕΝ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ τότε δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

23. Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο διάστημα Δ , τότε η αντίστροφη της, δηλαδή η $f^{-1} : f(\Delta) \rightarrow \Delta$ είναι συνεχής στο $f(\Delta)$ και έχει το ίδιο είδος μονοτονίας.

24. Αν το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης περιέχει το μηδέν τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

25. Αν η f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο $[\alpha, \beta]$ και επί πλέον ισχύει $f(\alpha)f(\beta) < 0$, τότε η f έχει ακριβώς μία ρίζα στο (α, β) .

- 26.** Από μια σχέση της μορφής $f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)=0$ συμπεραίνουμε ότι ή όλοι οι όροι του αθροίσματος είναι μηδέν, ή οι δύο από αυτούς είναι ετερόσημοι.
- 27.** Αν η f είναι συνεχής στο Δ και ισχύει:
- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ • $f(\xi) > 0$ με $\xi \in \Delta$, τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.
- Αν η f είναι συνεχής στο Δ και ισχύει:
- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ • $f(\xi) < 0$ με $\xi \in \Delta$, τότε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$.
- 28.** Αν στην εξίσωση $f(x)=g(x)$ υπάρχουν παρονομαστές που να μηδενίζονται για $x=\alpha$ ή $x=\beta$, τότε με απαλοιφή αυτών των παρονομαστών μετασχηματίζουμε την εξίσωση στη μορφή $h(x)=0$.
- 29.** Αν έχουμε υπολογίσει το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f και θέλουμε να δείξουμε ότι μια εξίσωση έχει μοναδική ρίζα τότε προσπαθούμε να μετασχηματίσουμε την εξίσωση σε μια άλλη ισοδύναμη, της μορφής $f(x)=\kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$.
- 30.** Αν ο αριθμός κ ανήκει στο σύνολο τιμών της f και η f είναι γνησίως μονότονη τότε η εξίσωση $f(x)=\kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$ έχει μοναδική ρίζα. Το ίδιο ισχύει και για την ισοδύναμή της, την αρχική εξίσωση. Αν ο αριθμός κ δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.
- 31.** • Ένας από τους τρόπους που χρησιμοποιείται για να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση της μορφής $f(x)=\kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) , είναι το θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών.
- Ειδικά σε ασκήσεις που παρατηρούμε ότι το δεύτερο μέλος είναι ένας αριθμός (άθροισμα διαφορετικών τιμών της f) της μορφής:
$$\frac{v_1 f(x_1) + v_2 f(x_2) + \dots + v_\kappa f(x_\kappa)}{v_1 + v_2 + \dots + v_\kappa}$$
, προσπαθούμε, χρησιμοποιώντας τη μονοτονία της f , να αποδείξουμε ότι αυτός βρίσκεται μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών.
 - Όταν στο πρόβλημα έχουμε τρεις ή περισσότερες τιμές της $f(x)$, η αντιμετώπιση γίνεται συνήθως με το Θ.Ε.Μ.Τ. και στη συνέχεια με το Θ.Ε.Τ.
- 32.** Για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, αρκεί να δείξουμε ότι είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ότι $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Ένας τρόπος για να δείξουμε ότι μια ευθεία της μορφής $\mathcal{E}: y=\kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$ έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (\alpha, \beta)$, είναι να εφαρμόσουμε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών αποδεικνύοντας ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0)=\kappa$.
- Ένας άλλος τρόπος είναι να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Bolzano για τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\kappa$ σε κατάλληλο διάστημα.
- 33.** Αν έχουμε μία συνάρτηση f συνεχή και γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ , τότε μπορούμε να βρούμε το σύνολο τιμών της f ανάλογα με το είδος της μονοτονίας της και τη μορφή του Δ . Δηλαδή:

$[\alpha, \beta]$	ΓΝΗΣΙΩΣ ΑΥΞΟΥΣΑ	$[f(\alpha), f(\beta)]$
	ΓΝΗΣΙΩΣ ΦΘΙΝΟΥΣΑ	$[f(\beta), f(\alpha)]$
(α, β)	ΓΝΗΣΙΩΣ ΑΥΞΟΥΣΑ	$\left(\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x), \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) \right)$
	ΓΝΗΣΙΩΣ ΦΘΙΝΟΥΣΑ	$\left(\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x), \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) \right)$
$[\alpha, \beta)$	ΓΝΗΣΙΩΣ ΑΥΞΟΥΣΑ	$\left[f(\alpha), \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) \right)$
	ΓΝΗΣΙΩΣ ΦΘΙΝΟΥΣΑ	$\left(\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x), f(\alpha) \right]$
$(\alpha, \beta]$	ΓΝΗΣΙΩΣ ΑΥΞΟΥΣΑ	$\left(\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x), f(\beta) \right]$
	ΓΝΗΣΙΩΣ ΦΘΙΝΟΥΣΑ	$\left[f(\beta), \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) \right)$

Πρέπει να προσέξουμε ότι στις περιπτώσεις που έχουμε ανοιχτά διαστήματα αντί για άκρο πραγματικό αριθμό μπορούμε να έχουμε το $\pm\infty$. Σε αυτή την περίπτωση ισχύουν ανάλογα συμπεράσματα.

34. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής και 1-1 σε ένα διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ τότε είναι και γνησίως μονότονη στο Δ . (Η πρόταση για να χρησιμοποιηθεί στις γενικές εξετάσεις θέλει απόδειξη.)

Απόδειξη:

Έστω $\alpha, \beta \in \Delta$ με $\alpha \neq \beta$. Αφού η f είναι 1-1 ισχύει ότι $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Ας υποθέσουμε ότι $\alpha < \beta$ και $f(\alpha) < f(\beta)$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $\kappa \in (\alpha, \beta)$ ισχύει $f(\alpha) < f(\kappa) < f(\beta)$.

Θα εργασθούμε με την εις άτοπο απαγωγή. Έστω δηλαδή $f(\alpha) > f(\kappa)$. Επειδή η f στο διάστημα $[\kappa, \beta]$ είναι συνεχής, έχουμε σαν αποτέλεσμα να παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ του $f(\kappa)$ και του $f(\beta)$. Άρα αφού $f(\kappa) < f(\alpha) < f(\beta)$, υπάρχει $\xi_1 \in (\kappa, \beta)$ έτσι ώστε $f(\xi_1) = f(\alpha)$ που είναι άτοπο διότι η f είναι 1-1.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $f(\kappa) > f(\beta)$. Επειδή η f στο διάστημα $[\alpha, \kappa]$ είναι συνεχής, έχουμε σαν αποτέλεσμα να παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ του $f(\alpha)$ και του $f(\kappa)$. Άρα αφού $f(\alpha) < f(\beta) < f(\kappa)$, υπάρχει $\xi_2 \in (\alpha, \kappa)$ έτσι ώστε $f(\xi_2) = f(\beta)$ που είναι άτοπο διότι η f είναι 1-1. Επίσης ισχύει ότι $f(\kappa) \neq f(\alpha) \neq f(\beta)$ διότι η f είναι 1-1.

Άρα ισχύει ότι $f(\alpha) < f(\kappa) < f(\beta)$ για κάθε $\kappa \in (\alpha, \beta)$ δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο τυχαίο $[\alpha, \beta] \subseteq \Delta$. Με αντίστοιχο τρόπο αποδεικνύεται ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

35. Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

Απόδειξη:

Έστω $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ με $\alpha_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$ ένα πολυώνυμο περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: Έστω $\alpha_n > 0$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\alpha_n x^n) = -\infty \text{ οπότε υπάρχει } \alpha < 0 \text{ τέτοιο ώστε να ισχύει } P(\alpha) < 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha_n x^n) = +\infty \text{ οπότε υπάρχει } \beta > 0 \text{ τέτοιο ώστε να ισχύει } P(\beta) > 0.$$

Συνεπώς για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, ισχύουν:

1. Είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο διάστημα $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$. 2. $P(\alpha)P(\beta) < 0$

Άρα σύμφωνα με το Θ. Bolzano η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$, συνεπώς και στο $\mathbb{R}$.

Ομοίως εργαζόμαστε αν $\alpha_n < 0$.

36. Αν για δυο συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει: $f(x) \cdot g(x) = 0$ για κάθε $x \in A$,

τότε δεν έπεται κατ' ανάγκη ότι: $f(x) = 0$ για κάθε $x \in A$ ή $g(x) = 0$ για κάθε $x \in A$.

Πράγματι, αν θεωρήσουμε π.χ. τις συναρτήσεις: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$ τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \cdot g(x) = 0$, αλλά δεν ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για αυτό το λόγο εργαζόμαστε ως εξής:

Με συμπλήρωση τετραγώνου καταλήγουμε σε μια ισότητα της μορφής

$$(f(x) - \kappa)^2 = \lambda^2 \Leftrightarrow g^2(x) = \lambda^2 \quad (1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ όπου } g(x) = f(x) - \kappa, \kappa, \lambda \in \mathbb{R} \text{ με } \lambda > 0.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g^2(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) \neq 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, ως διαφορά συνεχών, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα είναι ή $g(x) < 0$ ή $g(x) > 0$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g(x) < 0$, τότε από (1) έχουμε: $g(x) = -\lambda \Leftrightarrow f(x) - \kappa = -\lambda \Leftrightarrow f(x) = \kappa - \lambda$.
- Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g(x) > 0$, τότε: από (1) έχουμε $g(x) = \lambda \Leftrightarrow f(x) - \kappa = \lambda \Leftrightarrow f(x) = \kappa + \lambda$.

Επομένως: ή $f(x) = \kappa - \lambda$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $f(x) = \kappa + \lambda$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ Α - ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ-ΛΑΘΟΥΣ

1. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$, η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ρίζα στο (a, b) και υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) < 0$, τότε θα ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (a, b)$.
2. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, και παίρνει δύο διαφορετικές τιμές $f(x_1)$, $f(x_2)$ με $x_1, x_2 \in [a, b]$, τότε παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(x_1)$ και $f(x_2)$.
3. Αν για μια συνεχή συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$, ισχύει $f(x_1) = 1$ και $f(x_2) = 4$, τότε υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = e$.
4. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[a, b]$, τότε το σύνολο τιμών της είναι $[f(a), f(b)]$.
5. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[a, b]$, τότε το σύνολο τιμών της είναι $[f(b), f(a)]$.
6. Κάθε συνεχής συνάρτηση f στο $[a, b]$ με $f(a) \neq f(b)$, παίρνει μόνο τις τιμές μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$.
7. Αν $(1-x)(1+5x) \leq f(x) \leq (3x+1)^2$, τότε η f είναι συνεχής στο 0.
8. Αν η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, τότε το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x))$.
9. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[a, b]$. Αν η f είναι 1-1 στο $[a, b]$, τότε είναι και γνησίως μονότονη στο $[a, b]$.
10. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 με $f(x_0) \neq 0$, τότε κοντά στο x_0 οι τιμές της f είναι ομόσημες του $f(x_0)$.
11. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ , τότε η αντίστροφή της είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $f(\Delta)$.
12. Αν η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ είναι συνεχής και 1-1 στο Δ , τότε η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο $f(\Delta)$.
13. Κάθε συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.
14. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 1 \\ 2-x^2, & x \geq 1 \end{cases}$. Ισχύει ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{1\}$.
15. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f+g$ δεν είναι συνεχής στο x_0 .
16. Αν οι συναρτήσεις f, g δεν είναι συνεχείς στο σημείο x_0 του κοινού πεδίου ορισμού τους, τότε η συνάρτηση $f+g$ δεν είναι συνεχής στο x_0 .
17. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε και η f^2 είναι συνεχής στο x_0 .
18. Αν η συνάρτηση $f+g$ είναι συνεχής στο x_0 , τότε και οι συναρτήσεις f, g είναι οπωσδήποτε συνεχείς στο x_0 .

19. Αν οι συναρτήσεις f, g δεν είναι συνεχείς στο x_0 τότε η συνάρτηση $f + g$ δεν είναι συνεχής στο x_0 .

20. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο x_0 , τότε και η $f \circ g$ είναι συνεχής στο x_0 .

21. Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $(-2, 2)$ τότε η $f(1-x)$ είναι συνεχής στο $(-1, 3)$.

22. Αν η f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και συνεχής στο $x_0 \in \Delta$, τότε ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right).$$

23. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < 0$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική λύση.

24. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(\alpha)f(\beta) \leq 0$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[\alpha, \beta]$.

25. Υπάρχει πολυώνυμο $P(x)$ με διαδοχικές ρίζες τους αριθμούς $1, 4, 8$ τέτοιο ώστε :
 $P(2) \cdot P(3) \cdot P(5) \cdot P(7) < 0$.

26. Αν f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f^2(x)[g(x)-1] \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε οι f, g διατηρούν σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

27. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και αντιστρέψιμη στο $\mathbb{R}$ με $f^{-1}(3) = 0$ και $f^{-1}(-1) = 2$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ακριβώς πραγματική ρίζα.

28. Η εικόνα, $f((\alpha, \beta))$, ενός ανοικτού διαστήματος (α, β) , μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι πάντοτε ένα ανοικτό διάστημα.

29. Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και μη σταθερή, τότε το σύνολο τιμών της μπορεί να είναι το $\mathbb{R}^*$.

30. Αν η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, τότε το $f(\beta)$ είναι η ελάχιστη τιμή της f .

31. Αν η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το διάστημα (γ, δ) , τότε δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

ΘΕΜΑ Α - ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 1, & x = 3 \end{cases}$. Τότε ισχύει:

- Α. η f δεν είναι συνεχής στο 3 Β. η f είναι συνεχής στο 3
 Γ. η f για $x > 3$ είναι γνησίως φθίνουσα Δ. δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ Ε. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$

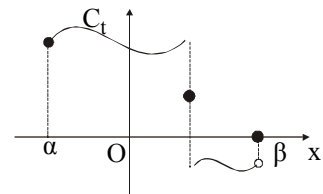
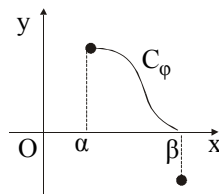
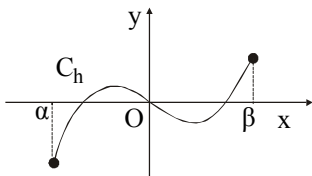
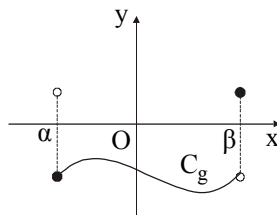
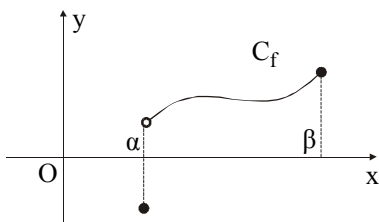
2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και 1 - 1. Τότε η f

- Α. είναι πάντοτε γνησίως αύξουσα Β. δεν μπορεί να είναι άρτια
 Γ. είναι πάντοτε περιττή Δ. $f(1) = f(-1)$ Ε. είναι σταθερή συνάρτηση

3. Αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon\varphi(\pi x)}{x}, & x \neq 0 \\ \kappa, & x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο 0, τότε το κ είναι ίσο με

- Α. 1 Β. 0 Γ. π Δ. $\frac{\pi}{2}$ Ε. $-\pi$

4. Δίνονται οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις κάποιων συναρτήσεων f, g, h, φ, t .



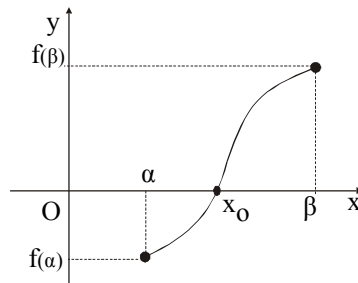
Τότε οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[a, b]$ ισχύουν για την περίπτωση

- Α. της συνάρτησης f Β. της συνάρτησης g Γ. της συνάρτησης h
 Δ. της συνάρτησης φ Ε. της συνάρτησης t

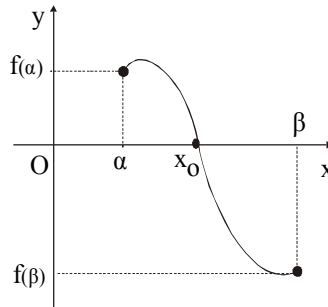
5. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και ισχύει $f(a) \cdot f(b) > 0$, τότε από τις παρακάτω προτάσεις σωστή είναι πάντοτε η:

- Α. $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ Β. δεν υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = 0$
 Γ. η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[a, b]$ Δ. η C_f δεν τέμνει ποτέ τον άξονα $y'y$
 Ε. καμία από τις προηγούμενες προτάσεις

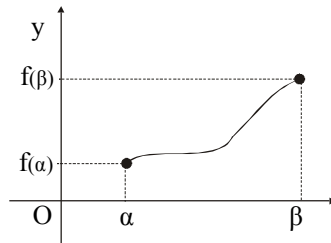
6. Αν η συνάρτηση f έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει
- A. περισσότερες από μία ρίζες
B. καμία ρίζα
Γ. μόνο μία ρίζα
Δ. δύο ρίζες
Ε. τίποτα από τα παραπάνω



7. Αν η συνάρτηση f έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει
- A. δύο ρίζες
B. καμία ρίζα
Γ. περισσότερες από μία ρίζες
Δ. μόνο μία ρίζα
Ε. τίποτα από τα παραπάνω



8. Η γραφική παράσταση της συνεχούς συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα. Το σύνολο τιμών της f είναι
- A. $(f(a), f(\beta))$ B. $[f(a), f(\beta)]$
Γ. $(f(\beta), f(a))$ Δ. $[f(\beta), f(a)]$
Ε. κανένα από τα προηγούμενα



9. Έστω συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 6, & x = 2 \end{cases}$ και οι προτάσεις:

I. υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

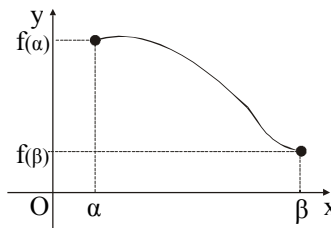
II. η f ορίζεται στο 2

III. η f είναι συνεχής στο 2.

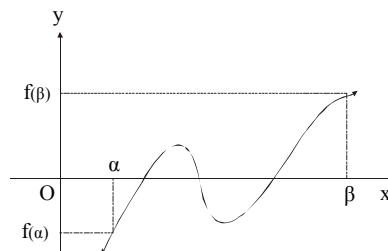
Τότε αληθεύουν

- A. μόνο η I B. μόνο η II Γ. μόνο η I ή η II
Δ. καμία από τις τρεις Ε. η III

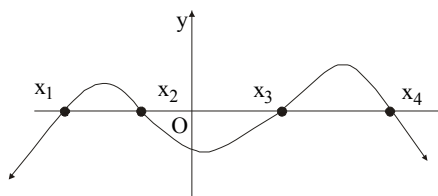
10. Η γραφική παράσταση της συνεχούς συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα. Το σύνολο τιμών της f είναι
- A. $(f(a), f(\beta))$ B. $[f(a), f(\beta)]$
Γ. $(f(\beta), f(a))$ Δ. $[f(\beta), f(a)]$
Ε. κανένα από τα προηγούμενα



11. Αν η συνάρτηση f έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει
- A. καμία ρίζα
B. ακριβώς τρεις ρίζες
Γ. μόνο μία ρίζα
Δ. το πολύ μία ρίζα
Ε. τουλάχιστον τέσσερις ρίζες



12. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται στο σχήμα, τότε **δεν** ισχύει ότι



- A. στο διάστημα (x_1, x_2) η $f(x) > 0$
 B. στο διάστημα (x_2, x_3) η $f(x) < 0$
 Γ. στο διάστημα (x_3, x_4) η $f(x) > 0$
 Δ. στα διαστήματα $(-\infty, x_1)$ και $(x_4, +\infty)$ η $f(x) < 0$
 Ε. στο διάστημα (x_2, x_4) η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες

13. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[a, \beta]$ και γνησίως φθίνουσα. Τότε το σύνολο τιμών της f είναι

- A. $[f(a), f(\beta)]$ B. $[f(\beta), f(a)]$ Γ. $[\beta, a]$
 Δ. $(f(\beta), f(a))$ Ε. το $\mathbb{R}$

14. Δίνεται μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και οι προτάσεις:

- I. f συνεχής II. f άρτια III. f γνησίως μονότονη

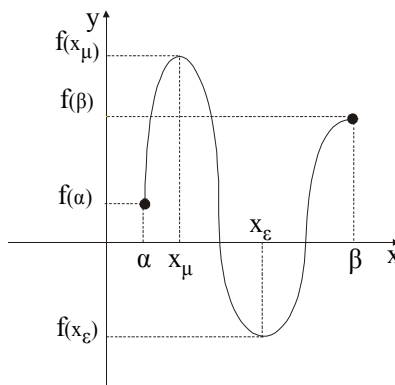
Η αντίστροφη της f υπάρχει, όταν ισχύει:

- A. η I B. η II Γ. οι I και II Δ. η III Ε. η I ή η II

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \ln(-x), & x \in (-\infty, 0) \\ 2x^2 + 1, & x \in [0, +\infty) \end{cases}$. Τότε:

- A. η f δεν είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ B. η f δεν είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$
 Γ. η f δεν είναι συνεχής στο 0 Δ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ Ε. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

16. Η γραφική παράσταση της συνεχούς συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα. Το σύνολο τιμών της f είναι

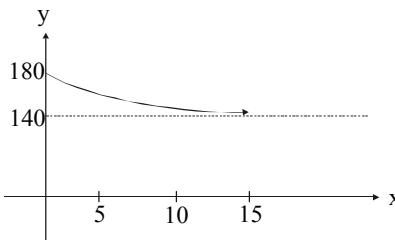


- A. $[f(\alpha), f(\beta)]$ B. $(f(x_\epsilon), f(x_\mu))$
 Γ. $[f(\beta), f(\alpha)]$ Δ. $[f(x_\epsilon), f(x_\mu)]$
 Ε. κανένα από τα προηγούμενα

17. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 2$. Τότε **λάθος** είναι

- A. $f(-1) > 0$ B. $f(1) < 0$ Γ. η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$
 Δ. υπάρχει $x_0 \in (-1, 1)$ ώστε $f(x_0) = 0$ Ε. $f(-1) \cdot f(1) > 0$

18. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μια συνάρτησης f . Τότε ισχύει



- A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 180$
 B. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 140$
 Γ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 140$ Δ. $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$

- Ε. η f δεν είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΘΕΜΑ Β

B1. Να εξετάσετε ποιά από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχής στο σημείο x_0 :

$$f(x) = \begin{cases} \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0 \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}, & x \in [0, 1) \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases}, \quad x_0 = 2.$$

B2. Να εξετάσετε αν η παρακάτω συνάρτηση είναι συνεχής:

$$f(x) = \begin{cases} \sigma\upsilon\nu(\eta\mu x) - 1, & x \geq 0 \\ x^{-1} \cdot \eta\mu x, & x < 0 \end{cases}.$$

B3. Να βρεθεί ο τύπος της συνεχούς συνάρτησης $f: [-5, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$xf(x) = \sqrt{x+5} - f(x) - 2 \quad (1) \text{ για κάθε } x \in D_f = [-5, +\infty).$$

B4. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία πληροί την παρακάτω σχέση:

$$\sigma\upsilon\nu x - 1 \leq x^3 - xf(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να βρείτε την } f(0).$$

B5. Έστω ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$. Να υπολογίσετε το $f(1)$ αν γνωρίζουμε ότι ισχύει: $x - x^4 \leq (x-1)f(x) \leq -3x+3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B6. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 5f(x) - 16}{\sqrt{x} - 3} = 5$ να βρείτε την τιμή της f στο 9.

B7. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις:

$$\alpha. f(x) = 3\eta\mu^3(x+1) + x^2 + 2 \quad \beta. g(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu(\eta\mu x)}{2x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

B8. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^4 + 3x^2 + 2$ και $g(x) = -9x^3 - 3x + 1$ τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο του διαστήματος $(-1, 1)$.

B9. Για κάθε $\alpha \in (1, 2)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε:

$$(1-\xi)(1-\alpha)e^\xi = (\alpha-2)\xi.$$

B10. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x - 1 = 3\eta\mu x$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $[-\pi, 0]$.

B11. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{1}{2^x} = \ln x$, έχει μοναδική ρίζα.

B12. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 2]$, γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ και $f(2) = 0$, τότε:

- α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

B13. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3^x + 2x + 1 = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(-1, 2)$.

B14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{αν } x \leq 0 \\ \alpha x + \beta, & \text{αν } 0 < x < 1, \text{ όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ 1 + x \ln x, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$

Να υπολογίσετε τα α και β έτσι, ώστε η f να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

----- ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2004 -----

B15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 16, & \text{αν } 0 < x < 5 \\ (\alpha^2 + \beta^2) \ln(x - 5 + e) + 2(\alpha + 1)e^{5-x}, & \text{αν } x \geq 5 \end{cases}$

- i. Να βρεθούν τα $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$.
ii. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 5$.
iii. Για τις τιμές των α και β του ερωτήματος ii) να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

----- ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2000 -----

B16. Δίνεται η συνάρτηση f , συνεχής στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - e^{2x} + 1}{\eta\mu 2x} = 5$.

Να βρείτε το $f(0)$.

----- ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2000 -----

B17. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $2 - x^4 \leq f(x) \leq 2 + x^4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι:

- i. $f(0) = 2$,
ii. η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

----- ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2001 -----

B18. Δίνεται η συνάρτηση f , συνεχής στο $x_0 = 0$, για την οποία ισχύει: $|x \cdot f(x) - \eta\mu 2x| \leq x^4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $f(0)$.

B19. Αν η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και είναι $0 < f(x) < 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$, να δείξετε ότι υπάρχει, ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$, ώστε να ισχύει: $f^2(\xi) + f(\xi) = \xi^2 + \xi$.

B20. Να δείξετε ότι η εξίσωση $-2x^4 + \alpha\beta x + 1 = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1]$. Δίνεται ότι $\alpha + \beta = 2$.

B21. Έστω $f(x) = x^4 - 3x^2$ και $g(x) = -2x + 1$. Να αποδειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο $(1, 2)$.

B22. Έστω $f(x) = 4(1 + \alpha^2)x^4 + 2(1 + \alpha + \alpha^2)x - \alpha$ και $g(x) = 8(1 + \alpha + \alpha^2)x^3 + (1 - 16\alpha + \alpha^2)x^2 + 3\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Να αποδειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο $[-1,1]$.

B23. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αν η ανίσωση $x^2 + 2(f(\alpha) + f(\beta))x + (f(\alpha) - f(\beta))^2 > 0$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η C_f της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.

B24. Έστω f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$ και κ, λ θετικοί αριθμοί. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει, ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε να ισχύει: $f(\xi) = \frac{\kappa f(\alpha) + \lambda f(\beta)}{\kappa + \lambda}$.

B25. Αν για τον μιγαδικό αριθμό $z = a + bi$ ισχύει: $|z| = \left| z + \frac{1}{z} \right|$, να αποδείξετε ότι:

i. $\operatorname{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}$.

ii. Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος (i), αν επιπλέον f συνεχής στο $[2,3]$, $f(2)=a>0$, $f(3)=\beta$ και $a>\beta$, να αποδείξετε ότι: υπάρχει $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

B26. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, με $\alpha < \beta$. Να δείξετε ότι για κάθε $\gamma \in (\alpha, \beta)$ υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,1)$, ώστε $\gamma = \xi \cdot \beta + (1-\xi)\alpha$.

B27. Να αποδείξετε ότι :

i. η εξίσωση $\frac{\chi^{2000} + 1}{\chi + 1} + \frac{\chi^{2004} + 2}{\chi - 1} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,1)$.

ii. η εξίσωση $\frac{\epsilon\phi\chi}{6\chi - \pi} + \frac{\sigma\phi\chi}{4\chi - \pi} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$.

B28. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,4]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0,4]$ τέτοιο ώστε: $2f(1) + 3f(2) + 4f(3) = 9f(\xi)$.

B29. Για μια συνάρτηση f συνεχή στο $\mathbb{R}$, ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 4$ και $4\eta\mu(x-2) \leq (x-2)f(x) \leq x^2 - 4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Να δειχθεί ότι η C_f τέμνει τη γραφική παράσταση της παραβολής $y = x^2 - x + 1$ σε σημείο με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα $(1,2)$.

B30. Να ελέγξετε αν η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu 2x + 5\eta\mu x - 2$ παίρνει την τιμή $-\frac{e}{3}$ στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

B31. Έστω συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f^2(x) + x^2 = 5x$ για κάθε $x \in \Delta = (0,5)$.

i. Να αποδείξετε ότι η f : • Δεν έχει ρίζες στο Δ . • Έχει σταθερό πρόσημο στο Δ .

ii. Να βρεθεί ο τύπος της f στο Δ , αν επιπλέον είναι γνωστό ότι $f(1) = -2$.

B32. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{Q}$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

B33. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{-x} = x + 2013$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

B34. Να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, -\pi \leq x \leq \pi$ ii. $f(x) = \eta\mu 2x + \sqrt{2} \sigma\upsilon\nu x, \pi \leq x \leq 2\pi$ iii. $f(x) = \sqrt{21 - 4x - x^2} - x - 3$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $3f(x) = 2x + \eta\mu(f(x))$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- i. $|f(x)| \leq |x|$, $x \in \mathbb{R}$
- ii. η f είναι συνεχής στο $x = 0$.

Γ2. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(xy) = f(x) + f(y)$, για κάθε $x, y > 0$.

Να αποδείξετε ότι:

- i. $f(1) = 0$
- ii. αν η f είναι συνεχής στο $x = 1$, τότε η f είναι συνεχής.

Γ3. Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $f^2(x) - 2f(x)\eta\mu x = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Γ4. Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $f^2(x) = 2e^x f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Γ5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$ και $g(x) = -x^2 + \beta x + \gamma$ με $\gamma \neq 0$. Αν ρ_1 είναι ρίζα της f και ρ_2 είναι ρίζα της g με $\rho_1 < \rho_2$, να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) + 2g(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (ρ_1, ρ_2) .

Γ6. Έστω f, g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το Δ . Εάν για κάθε $x \in \Delta$ η f είναι συνεχής και $f(x) - g(x) = cx$, $c \in \mathbb{R}$ τότε να δείξετε ότι: Αν ρ_1, ρ_2 δύο ετερόσημες ρίζες της $f(x) = 0$ η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[\rho_1, \rho_2]$.

Γ7. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο σημείο $x_0 = 0$ την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x+e| - |x-e|}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}.$$

Γ8. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x - e^x \cdot g(x)$.

Αν η h είναι συνεχής στο x_0 και η g δεν είναι συνεχής στο x_0 , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 .

Γ9. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί α και β ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \beta + \frac{2\alpha x^2 - 2\alpha\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}, & 0 \leq x < 1 \\ \beta\sqrt{8+x} + 4\alpha x + 3, & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{να είναι συνεχής στο } x_0 = 1.$$

Γ10. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $6x - x^2 \leq f(x) \leq x^2 - 6x + 18$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 3$.

β. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-9}{x-3}, & x \neq 3 \\ \alpha - 3, & x = 3 \end{cases}$.

Βρείτε τον $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση g να είναι συνεχής στο $x_0 = 3$.

Γ11. Αν $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ να δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha \cdot \eta\mu x + \pi = x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, \alpha + \pi]$.

Γ12. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3x^3 - 9x + 1 = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $(0, 2)$.

Γ13. Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x = 1 - \ln x$, έχει μοναδική ρίζα.

Γ14. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(x) + f(x+3) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 3]$ ώστε να ισχύει $f(x_0) = f(x_0 + 2)$.

Γ15. Δίνεται συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{e}{x-1}$ ορισμένη στο $[2, 5]$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$2013 + f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $[2, 5]$.

Γ16. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ώστε:

$$\eta\mu^2(x_0 + 2\beta) + \eta\mu^2(x_0 + 3\gamma) = \sigma\upsilon\nu^2(x_0 + \alpha) + \frac{1}{2}.$$

Γ17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - e^x$, $x \in (-\infty, 0)$.

i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2xe^x - x - 2 = 0$ έχει μοναδική αρνητική ρίζα.

iii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2xe^x = 2 - x$ είναι αδύνατη, στο $(-\infty, 0)$.

Γ18. Να βρεθούν οι συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f^2(x) - 7f(x) + 12 = 0$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ19. Έστω η συνάρτηση $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι

υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (-1, 2)$ ώστε: $f(x_0) = \frac{2f(-1) + f(0) + 3f(2)}{6}$.

Γ20. Δίνεται ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_1 = 1 + i$ είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2 + (\lambda - \kappa)z - 5\kappa + \lambda = 0$,

$\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε: $\xi^3 + (\kappa - \lambda)\xi + \kappa e^\xi = 0$.

Γ21. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι περιττή και συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 0} [f(\sin x)] = 2$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ ώστε $f(x_0) = 1$.

Γ22. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη και περιττή στο $\mathbb{R}$ με $f(5) = 7$.

Αν η εξίσωση $f(x) = 6$ είναι αδύνατη να αποδείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Γ23. Έστω συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $\Delta = (\alpha, \beta)$, γνησίως φθίνουσα στο $(\alpha, \gamma]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\gamma, \beta)$ όπου $\gamma \in (\alpha, \beta)$. Αν $f(\gamma) = -1$ και $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = 2$ και $\lim_{x \rightarrow \beta} f(x) = 3$, να βρεθεί:

i. Το σύνολο τιμών της f .

ii. Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$, $x \in \Delta$.

Γ24. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ με $f(2012) = 2013$. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

Γ25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x + 1$. Να δείξετε ότι:

i. η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

iii. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια μόνο ρίζα.

Γ26. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [-2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [-2, 4]$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-1, -5)$.

i. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $xf(x) + 16 = x^2 - 2f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-2, 4)$.

ii. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(\pi)x^3 + 5x^2 - 3)$.

Γ27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 5 - \sqrt{x-1} - \ln x$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Γ28. Οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$ και ισχύουν:

• Η f είναι περιττή,

• Η g είναι γνησίως φθίνουσα με $g(\alpha) = -\alpha$ και $g(-\alpha) = \alpha$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-\alpha, \alpha)$ τέτοιο ώστε: $f(g(x_0)) + f(x_0) + g(x_0) = 0$.

Γ29. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[α, β]$, με $α > 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον

$$\text{ένα } \xi \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιο ώστε: } \frac{f(\xi)}{\xi} = \frac{\alpha}{\alpha - \xi} + \frac{\beta}{\beta - \xi}.$$

Γ30. (Υπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας στο $[α, β]$.)

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2 + 3x - 7$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) - g(x) = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$. (1) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[ρ_1, ρ_2]$, όπου $ρ_1, ρ_2$ με $ρ_1 < ρ_2$ οι ρίζες της $f(x) = 0$.

ΛΥΣΗ

Από την (1) έχουμε $g(x) = f(x) - \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$

• Η g είναι συνεχής στο $[ρ_1, ρ_2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

$$\text{Είναι } g(ρ_1)g(ρ_2) = \lambda^2 ρ_1 ρ_2 = -7\lambda^2, \text{ αφού}$$

$$g(ρ_1) = f(ρ_1) - \lambda ρ_1 = 0 - \lambda ρ_1 = -\lambda ρ_1$$

$$g(ρ_2) = f(ρ_2) - \lambda ρ_2 = 0 - \lambda ρ_2 = -\lambda ρ_2$$

$$\text{Και } \rho_1 \rho_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = -7$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

• Αν $\lambda \neq 0$,

Τότε $g(ρ_1)g(ρ_2) = \lambda^2 ρ_1 ρ_2 = -7\lambda^2 < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της $g(x) = 0$ στο διάστημα $(ρ_1, ρ_2)$.

• Αν $\lambda = 0$.

Τότε $g(ρ_1)g(ρ_2) = \lambda^2 ρ_1 ρ_2 = 0$, οπότε $g(ρ_1) = 0$ ή $g(ρ_2) = 0$ και η $g(x)$ έχει ρίζες τις $ρ_1$ ή $ρ_2$.
Επομένως σε κάθε περίπτωση η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[ρ_1, ρ_2]$.

Γ31. (Θ.Bolzano σε συνάρτηση που δεν ορίζεται στα άκρα διαστήματος)

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x = x^2 - 4x + 2$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε την $f(x) = \ln x - x^2 + 4x - 2$, $x \in (0,1]$.

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - x^2 + 4x - 2) = -\infty$ διότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2 + 4x - 2) = -2$.

Αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) < 0$ κοντά στο 0. Επομένως:

- Η f είναι συνεχής στο $[x_1, 1]$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.
- Είναι $f(x_1) < 0$ και $f(1) = \ln 1 - 1^2 + 4 - 2 = 1 > 0$ δηλαδή ισχύει ότι $f(x_1) \cdot f(1) < 0$.

Οπότε σύμφωνα με το Θ.Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x - x^2 + 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow \ln x = x^2 - 4x + 2 \text{ στο διάστημα } (x_1, 1) \subseteq (0,1).$$

Γ32. Έστω η συνεχής και περιττή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$. Να δείξετε ότι υπάρχει σημείο της C_f με τεταγμένη 1.

Γ33. i. Να βρεθούν τα $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln \frac{1}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{\frac{1}{x}}$, $\kappa \in \mathbb{R}^*$.

ii. Να βρεθεί ο $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu \frac{1}{x}, & \alpha \nu \quad x > 0 \\ \kappa - 3, & \alpha \nu \quad x = 0 \\ 2^{\frac{\kappa}{x}}, & \alpha \nu \quad x < 0 \end{cases}$, να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Γ34. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ και $f(2011) = \frac{1}{2011}$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x)f(f(x)) = 1$, να βρείτε τους αριθμούς $f(2)$, $f(1)$ και $f(5)$.

Γ35. Έστω συνάρτηση $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και γνησίως αύξουσα. Αν $0 < f(0) < 3$, να δείξετε ότι:

i. Η ευθεία $y = -x + 3$ τέμνει τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 3)$.

ii. Υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (0, 3)$ έτσι ώστε: $f(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{5}{2}\right)}{3}$.

Γ36. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0, 4)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 4)$ τέτοιο ώστε: $f(1) + 2f(2) + 3f(3) = 6f(\xi)$.

Γ37. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και οι μιγαδικοί αριθμοί $z_x = x + f(x) \cdot i$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Αν $\text{Im}(z_x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|z_x| - \sin x}{\text{Re}(z_x)}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (|z_x| - x)$.

ii. Αν $|z_x - 1| = 1$ για κάθε $x \in [0, 2]$, τότε:

- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν $\text{Im}(z_x) > 0$.

Γ38. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2) > 2$ και ο μιγαδικός $z = \frac{5 + f(5)i}{2 - f(2)i} \in I$.

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(2, 5)$.

Γ39. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \lambda x^2 + 3$, όπου λ σταθερός πραγματικός αριθμός με $\lambda < -4$.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει 3 ρίζες πραγματικές.

Γ40. Έστω f συνεχής στο $(0, 1]$, με $f(0) = 2$ για την οποία ισχύει: $2x - x^2 \leq xf(x) \leq \eta \mu 2x$, για x κοντά στο 0.

Αν $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3f(x) + 2}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}$ να δείξετε ότι η C_f έχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με τον $x'x$.

Γ41. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(2010) = \frac{1}{2010}$ και $f(2015) = 3$.

- i. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ ώστε $f(\xi) = 1$.
- ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [1, 2]$ ώστε $f^2(x_0) = f(1)f(2)$.
- iii. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x)f(f(x)) = 1$, να βρείτε τους αριθμούς $f\left(\frac{1}{2010}\right)$, $f(1)$ και $f(2)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha \cdot e^x + 2}{e^x + 1}, & x \neq 0 \\ \beta + 1, & x = 0 \end{cases}$. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Δ2. Έστω η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, 5)$ και είναι τέτοια ώστε: $(x-1)f(x) = \kappa x^2 + \lambda x - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε τους $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ και τον τύπο της $f(x)$.

Δ3. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο σημείο $x_1 = 0$ και τέτοια ώστε:

$$f(x + \kappa y) = \sin \kappa y \cdot f(x) + \sin x \cdot f(\kappa y) + \kappa xy \quad (*) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \text{ και } \kappa \in \mathbb{R}^*.$$

α. Να βρείτε την τιμή $f(0)$. β. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Δ4. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο σημείο $x_1 = 0$ με $f(0) = 0$ και τέτοια ώστε: $f(x) \leq f(x+y-1) \leq f(x) - f(y-1)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Δ5. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο σημείο $x_1 = 1$ και τέτοια ώστε:

$$f(x \cdot y) = x \cdot f(y) + y \cdot f(x) - xy \quad (*) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}^*.$$

α. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. β. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$.

Δ6. Δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 3$ και ότι $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - \sqrt{x+6}}{x-3} = \alpha$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(3, 3)$.

β. Να βρείτε τον αριθμό $\alpha \in \mathbb{R}$ αν $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|f(x) - 2| - 1}{x-3} = 1$.

Δ7. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο x_0 και τέτοια ώστε: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h)}{\eta\mu 2h} = \alpha$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. β. Να βρείτε τον $\alpha \in \mathbb{R}$ αν $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 6$.

Δ8. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, έτσι ώστε: $|f(x) - g(x)| \leq [g(x) \cdot \ln x]^2$ για κάθε $x > 0$.

Αν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, να αποδείξετε ότι και η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Δ9. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 2 \\ f^2(6 - x^2) - |z - 1|x, & x > 2 \end{cases}$.

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού z .

Δ10. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $f^3(x) + f(x) = x^2 + \eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

α. $|f(x)| \leq x^2 + |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. β. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Δ11. Έστω συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 2$ τέτοια ώστε:

$$\left| f\left(\frac{1}{x}\right) - 2 \right| \leq \left| (x+1) \left(\frac{1}{x} - \eta\mu \frac{1}{x} \right) \right| \text{ για κάθε } x > 0.$$

α. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x+1) \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right]$.

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Δ12. Έστω συνάρτηση $f: [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $[0, 6]$ με $f(0) = f(6)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = f(x+2) - f(x)$ και να δείξετε ότι αυτή είναι συνεχής.

β. Να αποδείξετε ότι: $g(0) + g(2) + g(4) = 0$.

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 4)$ ώστε: $f(\xi + 2) = f(\xi)$.

Δ13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + e^{-x} - \frac{\eta\mu x}{x}$.

α. Βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

β. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλ. σημείο.

Δ14. α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x(e^x + 3) + 2e^x}{x(x+2)} = \frac{e^{-x} - 1}{x-1}$ έχει δύο τουλάχιστον ετερόσημες ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in (-2, 1)$.

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση g η οποία είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε: $\frac{g(\rho_1)}{\rho_2} = \frac{g(\rho_2)}{\rho_1}$, όπου ρ_1, ρ_2 οι ρίζες του προηγούμενου ερωτήματος.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία ακριβώς πραγματική ρίζα.

Δ15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - e^x$, $x \in (-\infty, 0)$.

i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2xe^x - x - 2 = 0$ έχει μοναδική αρνητική ρίζα.

iii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2xe^x = 2 - x$ είναι αδύνατη, στο $(-\infty, 0)$.

Δ16. Έστω η συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $\Delta = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ για την οποία ισχύει $x^2 + 2f^2(x) = 2$ για κάθε $x \in \Delta = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα Δ .

β) Να δείξετε ότι η $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ αν $f(0) = 1$.

γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$.

δ) Να γίνει η γραφική της παράσταση.

Δ17. Δίνεται μία συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[0, 3]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 3]$ τέτοιο ώστε: $f(1) + 2f(2) = 3f(\xi)$.

Δ18. Δίνεται η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: (1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - 3}{x - 2} = 2 \text{ και } 2\eta\mu(x - 1) \leq (x - 1)f(x) \leq x^2 - 1 \text{ για κάθε } x \in (1, 2).$$

i. Να υπολογιστούν τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

ii. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $h(x) = f(x) - \frac{1}{x-1} + 1$.

iii. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{f(x) + 1}$ έχει με την ευθεία

$\varepsilon: y = x - 1$ μόνο ένα κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1, 2)$.

Δ19. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f^2(x) - 2f(x) = x^2 - 2x + 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1) και $f(0) = -1$. Να δείξετε ότι:

i. Η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη. ii. $f(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii. Η ευθεία $y = -\frac{\sqrt{7}}{2}$ έχει με τη γραφική παράσταση της f ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 3)$.

Δ20. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, w τέτοιοι ώστε: $|z| = 1$ και $|w| = 2$.

Έστω επίσης συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$f^3(x) + |z + w|f^2(x) + 5f(x) = x^2 + 2x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ ώστε $f(x_0) = 0$.

Δ21. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 1]$, τέτοια ώστε $0 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in [0, 1)$ ώστε $f^2(x_0) + x_0 e^{x_0} = f(x_0)$.

Δ22. Αν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{100} \in [0, 1]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi \in [0, 1]$ ώστε:

$$|\xi - \alpha_1| + |\xi - \alpha_2| + \dots + |\xi - \alpha_{100}| = 50.$$

Δ23. α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{1}{x} + \frac{\lambda^2}{x + \kappa} + \frac{\mu^2}{x - \kappa} = 0$ με $\kappa \cdot \lambda \cdot \mu \neq 0$, έχει ακριβώς δύο

ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in (-\kappa, \kappa)$.

β. Αν $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \mu^2 - \lambda^2$, να βρείτε τον αριθμό κ .

Δ24. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$f(x)(x^3 - \eta \mu x + e^x) \geq e^x - \sigma \nu \nu x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να βρείτε το πρόσημο της } f(x).$$

Δ25. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0, 2] \cup [3, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 2, f(2) = -2, f(3) = -1, f(4) = 7$.

Αν η f είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της, τότε:

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Δ26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\ln x} - x + 2, x \in (0, 1)$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $(x + 1) \ln x = 1$ είναι αδύνατη, στο $(0, 1)$.

Δ27. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x + e^{x-2}$.

α) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f .

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x = e^2(\alpha - \ln x)$, έχει μοναδική ρίζα για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

γ) Να λυθεί η εξίσωση $e \ln x + e^{x-1} = 1$.

Δ28. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) < f(\beta)$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x_0) = \frac{f(\alpha) + 2f(\beta)}{3}$.

Δ29. Να βρεθούν οι συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f^4(x) - f^3(x) + 2f^2(x) - 4f(x) - 8 = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ30. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[1, 3]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$, ώστε $f(\xi) = \frac{f(1) + 3f(2) + 5f(3)}{9}$.

Δ31. Δίνεται συνάρτηση g ορισμένη και συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Αν $x_1, x_2, x_3 \in [\alpha, \beta]$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$ έτσι ώστε να ισχύει: $g(x_0) = \frac{\alpha_1 g(x_1) + \alpha_2 g(x_2) + \alpha_3 g(x_3)}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$ όπου $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$.

Δ32. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ τέτοιοι ώστε: $\alpha \neq 0$ και $\alpha\gamma - \beta\gamma + \gamma^2 < 0$.

Να αποδείξετε ότι $\beta^2 > 4\alpha\gamma$.

Δ33. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w και η συνάρτηση $f(x) = |w| \cdot x^3 - |z| \cdot x^2 + |w - z|$.

Να αποδείξετε υπάρχει $x_0 \in [-1, 1]$ ώστε $f(x_0) = 0$.

Δ34. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(\eta\mu^2 x) + e^x = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Δ35. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$.

Να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε ευθεία παράλληλη στη διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε ένα τουλάχιστον σημείο.

Δ36. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha^x - 2\alpha, & x \geq 0 \\ \ln(x+1) - \eta\mu 3x, & -1 < x < 0 \end{cases}$ όπου $\alpha > 0$.

α. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής.

β. Για την τιμή του α του προηγούμενου ερωτήματος να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha^x + 2 = \ln(x+1)$ έχει μία ακριβώς θετική ρίζα.

Δ37. Έστω συνάρτηση $f : [-2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $[-2, 4]$ με $f(-2) = f(4)$.

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = f(x-1) - f(x+1)$ και να αποδείξετε ότι αυτή είναι συνεχής.
β. Να αποδείξετε ότι: $g(-1) + g(1) + g(3) = 0$.
γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [-1, 3]$ ώστε: $f(\xi+1) = f(\xi-1)$.

Δ38. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε: $f^2(x) + 2f(x) \cdot \sin x = x^2 + \eta\mu^2 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = -2$.

- α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) + \sin x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
β. Να βρείτε τη συνάρτηση f .

Δ39. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f^2(x) + f(x) = x^2 + x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$. Να δείξετε ότι:

- α) Η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη. β) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
γ) Η ευθεία $y = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$.

Δ40. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(1) = 3$ και $f(f(x)) + f(x) = 8$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1). Να δείξετε ότι:
α) η f δεν είναι $1-1$.
β) υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = 6$, όπου $g(x) = f(x) + x$.
γ) η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(3, 01, 4, 99)$.

Δ41. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 1 + 2i$ και

$z_2 = f(1) + f(2)i$, $f(2) \neq 0$. Αν $z_1 \cdot \overline{z_2}$ φανταστικός, τότε:

- α) να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$.
β) Αν επιπλέον, η f είναι γνησίως μονότονη και $f(2) < 0$, να δείξετε ότι:
i. $f(x) \leq f(1)$, για κάθε $x \in [1, 2]$.

ii. Η γραφική παράσταση της f έχει μόνο ένα κοινό σημείο με την ευθεία $y = -\frac{f(2)}{2}$.

Δ42. Δίνεται η συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f : [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 5$ και $f(5) = 1$.

- α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = c$, όπου $c \in [1, 5]$.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\gamma \in (1, 5)$ τέτοιο ώστε: $9f(\gamma) = 2f(2) + 3f(3) + 4f(4)$.

Δ43. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x^2 - 2x) + f(x) = 3x^2 - 3x + 8, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1). \text{ Να δείξετε ότι:}$$

α) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0 + 5$.

β) Η ευθεία $y = c$ με $c \in (1, 13)$ έχει με την C_f ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη $x_1 \in (-1, 3)$.

Δ44. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g συνεχείς στο $[0, 2]$ για τις οποίες ισχύουν τα εξής:

$$\bullet \quad f^2(0) + f^2(2) = 4(f(2) - 1) \quad \text{και} \quad \bullet \quad 0 \leq g(x) \leq 2 \quad \text{για κάθε } x \in [0, 2].$$

α) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 1$.

β) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_1 \in [0, 2]$.

γ) Αν επιπλέον η f είναι γνησίως μονότονη, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f(2 - x)$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, 2)$.

Δ45. Έστω συνάρτηση $f: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και γνησίως αύξουσα. Αν $f(1) > 0$ και $f(1) \cdot f(2) \cdot f(4) = 8$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [1, 4]$ έτσι ώστε: $f(\xi) = \xi$.

Δ46. i. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(1) + f(2) + f(3) = 0$. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα.

ii. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 1]$, με $f(0) = f(1)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x) = f\left(x + \frac{1}{3}\right) \text{ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο } [0, 1].$$