

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ 1

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΝ ΟΡΙΣΜΟ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Άσκηση 1

Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και στο $(0, +\infty)$ αντίστοιχα και ισχύουν:

$$\text{i) } f(0)=0, \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2, \quad \text{iii) } g(x) = \frac{(\sqrt{1+x}-1) \cdot f(x) + x \cdot \eta \mu x}{x^2}$$

Να βρείτε τον αριθμό $f'(0)$.

Άσκηση 2

Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και συνεχής στο σημείο $x_0 = 4$.

Αν $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{\sqrt{x}-2} = m \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x^2 \cdot f(x)$ για κάθε $x \in D_g$, υπολογίστε το $g'(4)$.

Άσκηση 3

Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμες στο σημείο $x_0 = 1$. Αν είναι $2g'(1) + g(1) \neq 0$, να υπολογίσετε το όριο: $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x) - f(1)}{\sqrt{x} \cdot g(x) - g(1)}$

Άσκηση 4

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε: $x^2 \leq f(x) \leq 2x^2 - 2x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η f παραγωγίζεται στο σημείο 1 και να βρείτε την τιμή $f'(1)$.

ης

Άσκηση 5

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1) = 2$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 \cdot f(1) - f(x)}{x - 1} = 4$$

- i. Να βρείτε την τιμή $f(1)$
- ii. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

$$\text{A) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - 4f(x) + 3}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\text{B) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{x+8}}{\eta\mu(x-1)}$$

Άσκηση 6

Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$, συνεχής στο σημείο x_0 και είναι: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2h)}{h} = m$,

$m \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = -\frac{m}{2}$.

Άσκηση 7

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και ισχύει $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ για κάθε

$x, y \in \mathbb{R}^*$, να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$.

Άσκηση 8

Αν για τη συνάρτηση f είναι $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + 2\beta\sqrt{x+3} + 6, & -3 \leq x < 1 \\ x^2 + (\alpha + \beta)x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$, να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

έτσι ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο 1.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΥΣ ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

Άσκηση 9

Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \sqrt{x} \cdot \eta\mu x$

ii. $f(x) = (\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x}, x \in (0, \pi)$

iii. $f(x) = x^{\frac{2}{5}}$

iv. $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$

v. $f(x) = \sqrt[7]{(x-3)^5}$

vi. $f(x) = \sqrt[5]{(x-2)^4}$

Άσκηση 10

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ περιττή και δυο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει ότι $f'(-1) = 3$.

i. Να υπολογίσετε την τιμή $f'(1)$

ii. Να δείξετε ότι $f(0) = f''(0) = 0$

iii. Εάν $g(x) = \eta\mu f(x) - f(\sigma\upsilon\nu x)$, να υπολογίσετε $g''(0)$.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Άσκηση 11

Έστω η "1-1" και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Αν για κάποιο σημείο $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(f^{-1}(\alpha)) = 0$, να αποδείξετε ότι η f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = \alpha$.

Άσκηση 12

- i. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x$. Να αποδείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη και στη συνέχεια να βρείτε την $(f^{-1})'(x)$.
- ii. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + 2x$. Να αποδείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη και στη συνέχεια να βρείτε την $(f^{-1})'(x)$.

Άσκηση 13

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 1 + \ln x$, $x > 0$.

- i) Δείξτε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και υπολογίστε τον αριθμό $f^{-1}(0)$.
- ii) Με δεδομένο ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, υπολογίστε τον αριθμό $(f^{-1})'(0)$.

Άσκηση 14

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - 2 + \frac{e^x}{e^x - 1}$, $x \in [\ln 3, \ln 6]$.

- i) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
- ii) Με δεδομένο ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη να υπολογίσετε τον αριθμό $(f^{-1})'\left(\frac{10}{3}\right)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ

Άσκηση 15

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2} \text{ η οποία σχηματίζει με τον άξονα } x'x \text{ γωνία } \frac{3\pi}{4} \text{ rad.}$$

Άσκηση 16

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - x$ και $g(x) = \frac{\alpha}{x}$. Για ποια τιμή του $\alpha \neq 0$ οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στο κοινό τους σημείο είναι κάθετες;

Άσκηση 17

Αν C_1, C_2 είναι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x}$ και

$g(x) = 2x^2 + 6x - \alpha$ αντίστοιχα, να βρείτε για ποια τιμή του α η εφαπτόμενη της C_1 στο σημείο

$M(1, f(1))$ εφάπτεται και στη C_2 .

ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Τυπολόγιο Στερεομετρίας

<u>Σφαίρα</u>	<u>Κύλινδρος</u>	<u>Κύβος</u>	<u>Ορθογώνιο</u>	<u>Κώνος</u>
$r = \text{ακτίνα}$	$r = \text{ακτίνα βάσης}$ $h = \text{ύψος κυλίνδρου}$	$x = \text{ακμή}$ κύβου	<u>Παραλληλεπίπεδο</u> $x, y, z = \text{διαστάσεις}$ του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου	$r = \text{ακτίνα βάσης}$ $h = \text{ύψος κώνου}$ $\lambda = \text{γενέτειρα κώνου}$
$E = 4\pi r^2$	$E = 2\pi rh$ (παράπλευρη) $E = 2\pi rh + 2\pi r^2$ (ολική)	$E = 6x^2$	$E = 2(xy + yz + zx)$	$E = \pi r \lambda$ (παράπλευρη) $E = \pi r \lambda + \pi r^2$ (ολική)
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	$V = \pi r^2 h$	$V = x^3$	$V = xyz$	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΝ ΡΥΘΜΟ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Άσκηση 18

Κινητό Μ κινείται επί της παραβολής $y = x^2$ $\forall x \geq 0$. Τη χρονική στιγμή που απέχει από την αρχή των αξόνων $3\sqrt{10}$ cm ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του είναι $0,2$ cm/sec, να βρείτε

- i. Το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του Μ.
- ii. Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\theta = \widehat{MOx}$.

Άσκηση 19

Κινητό κινείται σε τροχιά με εξίσωση $4x^2 + y^2 = 4$. Τη χρονική στιγμή που διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$ η τεταγμένη του ελαττώνεται με ρυθμό 2 μ/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του κινητού την ίδια χρονική στιγμή.

Άσκηση 20

Δίνεται μιγαδικός z η εικόνα του οποίου κινείται σε καμπύλη εξίσωσης $x^2 + y^2 = 4$. Εάν το πραγματικό μέρος του μιγαδικού ελαττώνεται με ρυθμό 2 μονάδες/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του μέτρου του μιγαδικού όταν το φανταστικό του μέρος είναι ίσο με 1 και το πραγματικό μέρος του είναι θετικό.

Άσκηση 21

Έστω $z \in \mathbb{C}$ ώστε $|z| = 2$. Εάν ο ρυθμός μεταβολής του πραγματικού του μέρους είναι ίσος με το φανταστικό του μέρος κάθε χρονική στιγμή t όπου $t > 0$ με $\text{Im}(z) \neq 0$

- i. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του φανταστικού μέρους του μιγαδικού.
- ii. Εάν M η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\widehat{MOx}$ και να αποδείξετε ότι η εικόνα του z κινείται σε κύκλο κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Άσκηση 22

Ο όγκος μιας σφαίρας αυξάνει με ρυθμό $10 \text{ cm}^3 / \text{sec}$. Να βρείτε

- i. Τον ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας της σφαίρας τη χρονική στιγμή που η ακτίνα της σφαίρας είναι 5 cm .
- ii. Την ακτίνα της σφαίρας την χρονική στιγμή που η επιφάνειά της αυξάνει με ρυθμό $2 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$.

Άσκηση 23

Μια βιομηχανία κατασκευάζει καθημερινά x τεμάχια ενός προϊόντος. Το κόστος παραγωγής δίνεται από τη συνάρτηση $K(x) = 6x^2 + 100x - 20$ σε €. Η τιμή πώλησης κάθε τεμαχίου είναι $0,4x^2 - 21x + 640$ σε €.

- i. Να βρείτε πότε ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους είναι θετικός.
- ii. Να βρείτε το οριακό κόστος και το οριακό κέρδος, όταν η βιομηχανία κατασκευάζει 600 τεμάχια ημερησίως.

Άσκηση 24

Αυτοκίνητο ανέρχεται κεκλιμένο δρόμο με μήκος $AB = 300 \text{ m}$. Η κατακόρυφη απόσταση $B\Gamma$ από τον ορίζοντα είναι ίση με 60 m . Εάν το αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα 45 km/h , να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του ύψους του αυτοκινήτου.

Άσκηση 25

Μια σκάλα AB με μήκος 5 m είναι τοποθετημένη σε κατακόρυφο τοίχο. Το κάτω άκρο A της σκάλας γλιστράει με ταχύτητα 9 m/min .

- i. Να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο πέφτει το πάνω άκρο B της σκάλας, τη στιγμή που η κορυφή B απέχει 3 m από το έδαφος.
- ii. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ που σχηματίζει η σκάλα με το οριζόντιο έδαφος την στιγμή που το άκρο A έχει απομακρυνθεί 3 m από τον τοίχο.

Άσκηση 26

Ένα αερόστατο αρχικά βρίσκεται στο έδαφος στη θέση E και απέχει 80 m από παρατηρητή που βρίσκεται σε θέση Π. Το αερόστατο ανεβαίνει με ρυθμό 50 m/min. Να βρείτε:

- i. Τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης ΠΑ όπου A η θέση του αεροστάτου, τη στιγμή που το αερόστατο βρίσκεται σε ύψος 60 m.
- ii. Τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας ΕΠΑ την ίδια χρονική στιγμή.

Άσκηση 27

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x$.

- i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- ii. Σημείο M κινείται στην C_f και έστω A, B οι προβολές του στους άξονες $x'x$, $y'y$ αντίστοιχα.

Εαν η τετμένη του M ανήκει στο διάστημα $(0,1)$ να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου ΟΑΜΒ τη στιγμή που η τετμημένη του M είναι ίση με e^{-3} , εαν γνωρίζετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του M είναι $e \frac{\mu}{s}$

Άσκηση 28

Η θέση ενός υλικού σημείου που κινείται πάνω σ' έναν άξονα δίνεται από τον τύπο

$$x = x(t) = t^3 - 9 \cdot t^2 + 24 \cdot t, \text{ όπου } t \text{ η τιμή του χρόνου, μετρημένος σε sec. Βρείτε:}$$

- i. τις θέσεις του υλικού σημείου όταν η ταχύτητα του είναι μηδέν,

- ii. τις θέσεις του υλικού σημείου όταν η επιτάχυνση του είναι μηδέν,
- iii. την ταχύτητα και την επιτάχυνση του υλικού σημείου 2 sec μετά από την αρχή της κίνησής του.

Άσκηση 29

Το μήκος x ενός ορθογωνίου μειώνεται με ρυθμό 2 cm/sec και το πλάτος y αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/sec. Όταν $x=12$ cm και $y=5$ cm, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής:

- i. του εμβαδού,
- ii. της περιμέτρου,
- iii. των μηκών των διαγωνίων του.

Άσκηση 30

Δίνεται ορθή γωνία xOy . Δύο υλικά σημεία A και B ξεκινούν ταυτόχρονα από τη κορυφή O και κινούνται ευθύγραμμα κατά μήκος των πλευρών Ox και Oy με σταθερές ταχύτητες $v_A = 4\text{ m/sec}$ $v_B = 5\text{ m/sec}$ αντίστοιχα. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E του τριγώνου OAB κατά τη χρονική στιγμή $t_0 = 2\text{ sec}$.

Άσκηση 31

Κινητό K ξεκινά από το άκρο A ημικυκλίου διαμέτρου $AB=4\text{ m}$ και κινείται πάνω σ' αυτό.

Αν ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας $\hat{\omega} = \hat{KAB}$ είναι -1 rad/sec , να βρείτε την ταχύτητα της προβολής του K πάνω στη διάμετρο AB κατά την χρονική στιγμή που είναι $\hat{\omega} = \hat{\omega}_0 = 60^\circ$.