❶ Συνέπειες του Θ. Μ. Τ.

❷ Κανόνες De L΄Hospital

❸ Μονοτονία – Ακρότατα – Σύνολο τιμών συνάρτησης

❹ Ύπαρξη ρίζας εξίσωσης

<u>ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ Θ. Μ. Τ.</u>

Άσκηση 1

i. Έστω f μια παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι $f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f(x) = c \cdot e^x$, $c \in \mathbb{R}$.

ii. Να βρείτε τον τύπο μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αν ισχύουν:
$g'(x) + 2x + \text{συν}x = g(x) + x^2 + \text{ημ}x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $g(0)=1$.

Άσκηση 2

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:
$f'(x) = f(x) \cdot \ln\big(g(x)\big)$ και $g'(x) = -g(x) \cdot \ln\big(f(x)\big)$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση
$h(x) = \left(\ln f(x) - \text{ημ}x\right)^2 + \left(\ln g(x) - \text{συν}x\right)^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή. Αν επιπλέον ισχύει ότι $f(0)=1$ και $g(0) = e$, να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων f και g.

Άσκηση 3 (Θέμα 1989)

Έστω δύο συναρτήσεις f, g, με κοινό πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ, για τις οποίες υποθέτουμε ότι:

i. Είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο Δ,

ii. $f'' = g''$ και

iii. $0 \in \Delta$ και $f(0) = g(0)$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Για κάθε $x \in \Delta$, $f(x) - g(x) = c \cdot x$ όπου $x \in \mathbb{R}$.

β) Αν η $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες ρ_1, ρ_2 τότε η $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο κλειστό διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$.

<u>ΚΑΝΟΝΕΣ DE L 'HOSPITAL</u>

Άσκηση 4

Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\text{ημ}x - x}{x^2 - x^3}\right)$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\text{συν}x}{\text{εφ}^2 x}\right)$ **iii.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-\text{ημ}x}{e^x - e^{-x} - 2x}\right)$

iv. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{e^x + \ln x}{x^2 + x + 1}\right)$

Απ.: **i.** 0, **ii.** $\dfrac{1}{2}$, **iii.** $\dfrac{1}{2}$, **iv.** $-\infty$

Άσκηση 5

Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\text{ημ}x - \text{συν}x}{\text{ημ}2x - \sqrt{2}\text{συν}x}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{1-x}-(2+x)}{1-\text{συν}x}$

iii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{\eta\mu x}}{x-\text{ημ}x}$ **iv.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{e^{-x}+2x+1}{4e^{-x}+x+3}$ **v.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(x^2+x+1)}{\sqrt{1+x^2}+x}$

Απ.: **i.** $\sqrt{2}$, **ii.** δεν υπάρχει, **iii.** 1, **iv.** $\dfrac{1}{4}$, **v.** 0

Άσκηση 6

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση

$f(x) = \begin{cases} x\cdot e^x, & x \le 1 \\ \alpha\cdot\ln x + \beta, & x > 1 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Απ.: α = 2e, $\beta = e$

Άσκηση 7

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+\alpha)\cdot e^x-(1+\alpha)\cdot x+\beta}{x^2}=2$.

Απ.: $\alpha = 2,\ \beta = -2$

Άσκηση 8

Να βρείτε το παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\,x^3\cdot \ln^2 x\,)$ Απ: 0

ii. $\lim\limits_{x\to +\infty}[x\cdot(e^{\frac{1}{x}}-1)]$ Απ: 1

iii. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})}{x}$ Απ: 1

iv. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(3x^2-5\ln x\right)$ Απ: $+\infty$

v. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^2-2e^x\right)$ Απ: $-\infty$

vi. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$ Απ: 0

vii. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{\mathrm{x+3}}}{\sqrt{x+2}}$ Απ: 1

viii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x^2\text{συν}x}{x^2\text{ημ}^2x+\text{ημ}^4x}$ Απ: $\dfrac{1}{4}$

ix. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\text{ημ}\frac{1}{x}}{\text{εφ}x}$ Απ: 0

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ – ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ – ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ

Άσκηση 9

Να εξετάσετε ως προς την μονοτονία και βρείτε τα τοπικά ακρότατα και το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x)=x+\frac{1}{x}$ Απ: $f(A)=\left(-\infty,\ -2\right]\cup\left[2,\ +\infty\right)$

ii. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ Απ: $f(A)=\left[-1,\ 1\right)$

iii. $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ Απ: $f(A)=\left(-2,2\right)$

iv. $f(x)=(x-1)e^x-(x+1)e^{-x}$ Απ: $f(A)=\left[-2,\ +\infty\right)$

v. $f(x)=x\cdot(\ln x)^2$ Απ: $f(A)=\left[0,\ +\infty\right)$

vi. $f(x)=\ln(1+x^2)$ Απ: $f(A)=\left[0,\ +\infty\right)$

vii. $f(x)=\frac{x}{\ln x}$ Απ: $f(A)=\left(-\infty,\ 0\right)\cup\left[e,\ +\infty\right)$

viii. $f(x)=\frac{\sqrt{\ln x}}{x}$ Απ: $f(A)=\left[0,\ \frac{1}{2\sqrt{e}}\right]$

ix. $f(x)=\frac{\ln x}{x-\ln x},\ x>0$ Απ: $f(A)=\left(-1,\ \frac{1}{e-1}\right]$

x. $f(x)=e^x(\text{ημ}x-\text{συν}x),\ x\in\left[0,\ 2\pi\right]$ Απ: $f(A)=\left[-e^{-2\pi},e^{\pi}\right]$

xi. $f(x)=2\text{ημ}^2x-2\sqrt{3}\cdot\text{ημ}x+\sqrt{3},\ \ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ Απ: $f(A)=\left[-\frac{3}{2}+\sqrt{3},\ 2+3\sqrt{3}\right]$

xii. $f(x)=\begin{cases}1+ex-e^x, & x\geq 0\\ \ln(1+x^2), & x<0\end{cases}$ Απ: $f(A)=\mathbb{R}$

Άσκηση 10

Έστω η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=\frac{2+\ln x}{x}$.

i. Να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να δείξετε ότι: $\ln x\leq e\cdot x-2$ για κάθε $x>0$.

Άσκηση 11

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x+1)\cdot\ln(x+1)-x$, $x\geq 0$.

i. Να μελετήσετε την *f* ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Αν $\alpha\geq 0$, $\beta\geq 0$ και ισχύει ότι $e^{\beta}\cdot(\alpha+1)^{\alpha+1}=e^{\alpha}\cdot(\beta+1)^{\beta+1}$, να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta$.

Άσκηση 12

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\frac{\beta}{x}\right)+\frac{\beta}{x}-1$, $x\in[\alpha,\beta]$, όπου $0<\alpha<\beta$.

i. Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης *f*.

ii. Να αποδείξετε ότι $\left(\frac{e\cdot\alpha}{\beta}\right)^{\alpha}<e^{\beta}$, όπου $0<\alpha<\beta$.

Άσκηση 13

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{x\cdot\ln x}{x-1}$, $x>1$.

i. Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Αν $1<\alpha<\beta$, δείξτε ότι $\frac{\beta^{\beta}}{\alpha^{\alpha}}<\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\alpha\beta}$.

Άσκηση 14

Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με $f(x)=\alpha\ln x+\beta x^2-3x+2$, $x>0$, να παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1=1$ και $x_2=2$. Στη συνέχεια να βρείτε τις τιμές αυτών των ακροτάτων.

Απ: $a=2,\ \beta=\frac{1}{2}$

Άσκηση 15

Προσδιορίστε το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε, στο $x_0=1$, η συνάρτηση με τύπο

$f(x)=\left(1-\frac{\alpha}{3}\right)x^3-x^2+(\alpha-1)^2x+2012$ να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο.

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

Άσκηση 16

i. Να αποδείξετε ότι: $x \cdot \ln x + 1 \geq x$ για κάθε $x > 0$.

ii. Να αποδείξετε ότι $2 \cdot ημ3x - 3 \cdot ημ2x < 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$.

iii. Να αποδείξετε ότι $e^x \geq 1 + \ln(1+x)$, για κάθε $x \geq 0$.

Άσκηση 17

i. Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Αν ισχύει ότι $f(x) + ημ\pi x \leq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1)=g(1)$, να αποδείξετε ότι: $f'(1)=\pi+g'(1)$.

ii. Αν για κάθε $x > -1$ ισχύει $a^x \geq 1 + \ln(x+1)$, να δείξετε ότι $a = e$.

iii. Για την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_+^*$ συνάρτηση f ισχύει $f(x) - x^3 \leq x\ln x + 2$ για κάθε $x > 0$ και $f(1) = 3$. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 4x + 2014$.

Άσκηση 18

Να λύσετε την ανίσωση $\ln x + \ln(x+1) + 2x^2 \leq \ln(3-x) - 4x + 6$.

Άσκηση 19

i. Να αποδείξετε ότι $\nu\alpha^{\nu-1} \leq \dfrac{\alpha^\nu - \beta^\nu}{\alpha - \beta} \leq \nu\beta^{\nu-1}$, με $0 < \alpha < \beta$ και $\nu \in \mathbb{N}^*$.

ii. Αν $0 < \alpha \leq \beta < \frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{\alpha - \beta}{συν^2\alpha} \geq εφ\alpha - εφ\beta \geq \dfrac{\alpha - \beta}{συν^2\beta}$.

iii. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{x-1}{x} < \ln x < x - 1$ για κάθε $x > 1$.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ</u>

Άσκηση 20

Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, ώστε:

$g(x) \neq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και $\dfrac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = \dfrac{f(\beta)}{g(\beta)}$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) \cdot g(x_0) = f(x_0) \cdot g'(x_0)$.

Άσκηση 21

- **i.** Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη δύο φορές στο (α, β). Αν υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$ με $f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.
- **ii.** Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η ευθεία $y=x+1$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε τρία διαφορετικά σημεία. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε να ισχύει: $f''(x_0) = 0$.

Άσκηση 22

Έστω οι συναρτήσεις f, g συνεχείς σε ένα διάστημα $\Delta=[\alpha, \beta]$. Αν πρόκειται για συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο εσωτερικό του Δ και επιπλέον ισχύει $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, να αποδείξετε ότι:

- **i.** $g(\alpha) \neq g(\beta)$
- **ii.** υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο, ώστε $\dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

Άσκηση 23

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{e^{-x}}{1-x}=1$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 24

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x-1)e^{x}=(x+1)e^{-x}$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 25

Έστω η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f της οποίας η εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο της γραφικής της παράστασης δεν είναι παράλληλη στην ευθεία $y=3x$. Να δείξετε ότι η C_f και η ευθεία $y=3x+2014$ έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο.

Άσκηση 26

Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x-\eta\mu x=x^{2}$ δεν μπορεί να έχει περισσότερες από δύο ρίζες στο διάστημα $\left(0,+\infty\right)$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ</u>

Άσκηση 27

Να μελετηθούν ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής οι παρακάτω συναρτήσεις:

i. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15$.

ii. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2}{x^3}$.

iii. $f(x) = e^{-x^2}$.

Άσκηση 28

Να δείξετε ότι η $f(x) = x^2\left(3\ln x - x - 2\right)$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο $\left(0, +\infty\right)$.

Άσκηση 29

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x, \ \ x > 0$.

i.Να βρείτε τα διαστήματα που η f είναι κυρτή – κοίλη.

ii.Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $\mathrm{A}\left(e, f(e)\right)$.

iii.Να δείξετε ότι $\sqrt{e \cdot x}\ln x \le 3x - e$, για κάθε $x \in \left(1, +\infty\right)$.

Άσκηση 30

Δίνεται f με $f(x) = x^5 + x^3 + 3\eta\mu x, \ \ x \in \mathbb{R}$.

i.Να δείξετε ότι η C_f έχει μοναδικό σημείο καμπής.

ii.Βρείτε την εφαπτομένη στο σημείο καμπής.

iii.Δείξτε ότι $x^5 + x^3 + 3\eta\mu x \ge 3x$ για κάθε $x \ge 0$.

Άσκηση 31

Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $2x^2+e^x+f^2(x)=4x+3$ (1)

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η C_f δεν έχει κανένα σημείο καμπής.

Άσκηση 32

Έστω f παραγωγίσιμη $(-2,2)$ τέτοια ώστε: $f^2(x)-2f(x)+x^2-3=0$, (1)

για κάθε $x\in(-2,2)$.

i. Δείξτε ότι $f(x)\neq 1$, για κάθε $x\in(-2,2)$.

ii. Αποδείξτε ότι η f δύο φορές παραγωγίσιμη .

iii. Αποδείξτε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

Άσκηση 33

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha^2x^4-4\alpha x^3+6(2\alpha-1)x^2+11$, με $\alpha\in\mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του α η C_f έχει σημείο καμπής στο $x_0=1$.

Άσκηση 34

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^4+\lambda x^3+(3\lambda-9)x^2-7x+4$, με $\lambda\in\mathbb{R}$.

Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου λ, η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 35

i. Έστω $f:\Delta\to\mathbb{R}$ μια κυρτή συνάρτηση.

Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\geq f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ για κάθε $\alpha,\beta\in\Delta$.

ii. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\cdot\ln x,\ x>0$.

a. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

b. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\alpha\ln\alpha+\beta\ln\beta}{\alpha+\beta}\geq\ln\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ για κάθε α, β>0.