ΟΡΙΣΜΟΣ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Έστω f συνάρτηση συνεχής στο [α,β]. Χωρίζω το διάστημα [α,β] σε ν ίσα διαστήματα με τα σημεία:
$\alpha=\chi_0<\chi_1<\chi_2<\chi_3<\ldots<\chi_{\kappa-1}<\chi_\kappa<\ldots<\chi_\nu=\beta$.
Τότε τα διαστήματα αυτά $[\chi_0,\chi_1],[\chi_1,\chi_2]\ \ldots[\chi_{\kappa-1},\chi_\kappa],\ldots[\chi_{\nu-1},\chi_\nu]$, έχουν μήκος $\Delta\chi=\frac{\beta-\alpha}{\nu}$. Τότε λέμε ότι έχουμε μια ισοδιαμέριση του διαστήματος [α,β]. Επιλέγω μια ομάδα σημείων $\xi_1,\xi_2,\xi_3\ldots\xi_\nu$ όπου καθένα από αυτά ανήκουν στα παραπάνω διαστήματα αντιστοίχως .Δηλαδή $\xi_\kappa\in[\chi_{\kappa-1},\chi_\kappa]\ \forall\kappa\in\{1,2,3\ldots\nu\}$.
Τότε ορίζω το άθροισμα :

$$S_\nu=f(\xi_1).\Delta\chi+f(\xi_2).\Delta\chi+\ldots f(\xi_\nu).\Delta\chi=\sum_{\kappa=1}^{\nu}f(\xi\kappa).\Delta\chi=\Delta\chi.\sum_{\kappa=1}^{\nu}f(\xi\kappa)=$$

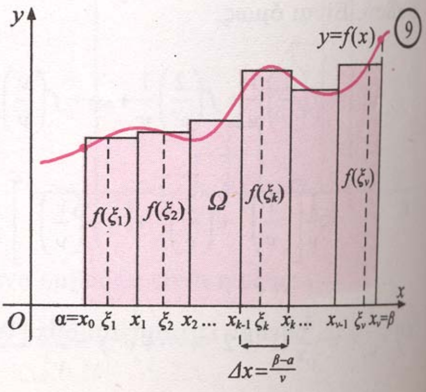
$$\frac{\beta-\alpha}{\nu}.\sum_{\kappa=1}^{\nu}f(\xi\kappa).$$

Τότε αποδεικνύεται ότι:
Το $\lim S_\nu$ υπάρχει <u>πάντα</u> εφόσον η f είναι συνεχής και αυτό το όριο είναι πραγματικός αριθμός <u>ανεξάρτητος</u> από την επιλογή των σημείων $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_\nu$.
Ορίζω σαν ορισμένο ολοκλήρωμα της f από α έως β και το συμβολίζω $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ αυτόν τον πραγματικό αριθμό. Δηλ.

$$\int_\alpha^\beta f(\chi)dx=\lim S_\nu\ .$$

Τα α,β λέγονται όρια της ολοκλήρωσης.
Επίσης ορίζω

$$\int_\alpha^\alpha f(x)dx=0\ \text{ και }\int_\beta^\alpha f(x)dx=-\int_\alpha^\beta f(x)dx$$



9
y
y=f(x)
f(ξ1)
f(ξ2)
Ω
f(ξk)
f(ξν)
x
O
α=x0
ξ1
x1
ξ2
x2 ...
xk-1
ξk
xk ...
xν-1
ξν
xν=β
Δx=(β−α)/ν