

PANOS SARAkinOS

Θέμα: Συναρτήσεις

- ❶ Η έννοια της συνάρτησης
- ❷ Ισότητα συναρτήσεων
- ❸ Πράξεις με συναρτήσεις
- ❹ Σύνθεση συναρτήσεων
- ❺ Μονοτονία συναρτήσεων
- ❻ Συνάρτηση 1-1
- ❼ Αντίστροφη συνάρτηση

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\ln(x^2 - 1)}$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Να δείξετε ότι το 2 ανήκει στο σύνολο τιμών της f .
- iii. Να βρείτε την σχετική θέση της C_f με τον άξονα $x'x$.

Άσκηση 2

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) - f(x) - 1 = x(x - 1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης δεν τέμνει τον άξονα των $x'x$.

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(xy) + f(x) + f(y) = xy + x + y \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

- i. Να προσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης
- ii. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων g, h με

$$g(x) = f^2(x) + \frac{1}{f^2(x)} \text{ και } h(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 4

Δίνεται μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, καθώς και οι μιγαδικοί αριθμοί της μορφής

$$z = x + i \cdot f(x), \quad w = f(x) + i \cdot x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισότητα $|w|^2 + |z|^2 = |w - z|^2$,

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}^*$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Άσκηση 5

Να εξετάσετε αν για τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+3}}$ και $g(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$ ισχύει $f = g$. Στην περίπτωση που είναι $f \neq g$ να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο να ισχύει $f(x) = g(x)$.

Άσκηση 6

Να εξετάσετε αν για τις συναρτήσεις $f(x) = \ln(x-1) + \ln(x+1)$ και $g(x) = \ln(x^2-1)$ ισχύει $f = g$. Στην περίπτωση που είναι $f \neq g$ να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο να ισχύει $f(x) = g(x)$.

Άσκηση 7

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$4[f(x) + g(x)]^2 = 8(f \cdot g)(x) + 4(f + g)(x) - 2, \text{ να δείξετε ότι: } f = g.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Άσκηση 8

Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο των συναρτήσεων $f + g$, $f \cdot g$, $\frac{g}{f}$ στις παρακάτω

περιπτώσεις:

i.
$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{16-x^2} \\ g(x) &= \ln(e^x - 1) \end{aligned}$$

ii.
$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2 + x - 6} \\ g(x) &= \ln(16 - x^2) \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Άσκηση 9

Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $g \circ f$, αν

i. $f(x) = \sqrt{x+4}$ και $g(x) = \sqrt{x-4}$

ii. $f(x) = x^2 + 3$ και $g(x) = \frac{1}{x-6}$

iii. $f(x) = \sqrt{x+1}$ και $g(x) = 3x^2 + 1$, με πεδία ορισμού $[-1, 3]$ και $(-2, 1]$ αντίστοιχα.

Απ: i) $(g \circ f)(x) = \sqrt{\sqrt{x+4}-4}$, $x \geq 12$

ii) $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x^2-3}$, $x \neq \pm\sqrt{3}$

iii) $(g \circ f)(x) = 3 \cdot x + 4$, $x \in [-1, 0]$

Άσκηση 10

Δίνονται οι συναρτήσεις: f , με $f(x) = \sqrt{25-x^2}$ και $g: [-1, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = x^2 - 3x + 1$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις: i. $f \circ g$, ii. $g \circ f$.

Απ: i. $(f \circ g)(x) = \sqrt{25 - (x^2 - 3x + 1)^2}$, $x \in [-1, 4]$

ii. $(g \circ f)(x) = -x^2 - 3 \cdot \sqrt{25-x^2} + 26$, $x \in [-5, 5]$

Άσκηση 11

Δίνονται οι συναρτήσεις f με $f(x) = x^2 + 2$ ορισμένη στο $A = [0, +\infty)$ και g με $g(x) = 18\sqrt{x}$ ορισμένη στο $B = (-\infty, 11)$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις: i. $g \circ f$ ii. $f \circ g$.

Άσκηση 12

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=\ln x+1$ και $g(x)=e^x+2$ ορισμένες στα σύνολα $(1, e+2)$ και $(0, 3)$ αντίστοιχα. Να ορίσετε τις συναρτήσεις: **i.** $f \circ g$ **ii.** $g \circ f$

$$\text{Απ: i. } (f \circ g)(x) = \ln(e^x + 2) + 1, \quad x \in (0, 1) \quad \text{ii. } (g \circ f)(x) = x \cdot e + 2, \quad x \in (1, e + 2)$$

Άσκηση 13

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 1}$ και $g(x) = \frac{2}{x - 2}$. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

$$\text{Απ: } (f \circ g)(x) = \frac{6 \cdot (x - 2)}{-x^2 + 4x}, \quad x \neq 0, 2, 4$$

Άσκηση 14

- i.** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f , αν ισχύει ότι: $f(2x + 1) = 4x^2 + 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ii.** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g , ώστε να ισχύει $(g \circ f)(x) = 2x^2 - 1$, αν $f(x) = x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Απ: i. } f(x) = x^2 - 2x + 3, \quad \text{ii. } g(x) = 2(x - 3)^2 - 1$$

Άσκηση 15

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + e^x$. Αν ισχύει ότι $(g \circ f)(x) = x + e^{1-x}$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g .

$$\text{Απ: } g(x) = \ln(x - 1) + \frac{e}{x - 1}$$

Άσκηση 16

- i.** Βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g αν $f(x) = 2x - 3$ και $f(g(x)) = x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.
- ii.** Βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g αν $f(x) = 2x - 1$ και $f(e^{g(x)}) = 2x^2 + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Απ: i. } g(x) = \frac{x^2 + x + 4}{2}, \quad \text{ii. } g(x) = \ln(x^2 + 2)$$

Άσκηση 17

- i. Αν μια συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = [2, 6]$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x^2 - x)$.
- ii. Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = [2, +\infty)$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = f(x^2 - 4x + 2)$.
- iii. Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = [-2, 1]$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x) = f(\ln x)$.
- iv. Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = [-2, +\infty)$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = f(2 + \ln x)$.

$$\text{Απ: i. } [-2, -1] \cup [2, 3], \quad \text{ii. } (-\infty, 0] \cup [4, +\infty), \quad \text{iii. } \left[\frac{1}{e^2}, e \right], \quad \text{iv. } \left[\frac{1}{e^4}, +\infty \right)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Άσκηση 18

Έστω η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $g(x) = f(x) - x$ είναι γνησίως φθίνουσα.
- ii. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει:
$$f(\lambda^2 - 3\lambda) - f(2\lambda - 6) > (\lambda^2 - 3\lambda) - (2\lambda - 6).$$

Άσκηση 19

Έστω η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, -2)$. Για την συνάρτηση f είναι $f(x) = \ln x - g(x)$ για κάθε $x > 0$.

- i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- ii. Να λύσετε την ανίσωση $2 \ln x < 2 + g(x^2)$ στο $(0, +\infty)$.

Απ: ii. $x \in (0, 1)$

Άσκηση 20

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι $f(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι για την συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{e^x - 1}$, $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει ότι $g(x) < 0$ για κάθε $x \neq 0$.

Άσκηση 21 Δίνεται η συνάρτηση

$$(f(x))e^x = x^4 + \ln x.$$

- i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.
- ii. Να λύσετε την ανίσωση $e^{4x^2+2} - e^{x^4+2} < \ln\left(\frac{x^4+2}{4x^2+2}\right)$.

Άσκηση 22

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w με εικόνες εσωτερικά σημεία του μοναδιαίου κυκλικού δίσκου, εκτός του σημείου $O(0,0)$ και η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = |z|^x + 2|w|^x - 3$.

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- ii. Να λύσετε την ανίσωση $|z|^{x^2+6} - 2|w|^{5x} \geq |z|^{5x} - 2|w|^{x^2+6}$.

Απ: ii. $x \in (2,3)$

Άσκηση 23

Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f^3(x) + f(\beta - x) = 4e^{-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- iii. Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x) - 1) \leq 1$.

Άσκηση 24

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\square\square$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,5)$ και $B(5,-2)$.

- i) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
- ii) Να δείξετε ότι η $f \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα.
- iii) Να λύσετε την ανίσωση $f(f(e^x)) < -2$.
- iv) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(f(\ln x + 1) + 7) > 1$.

Άσκηση 25

Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι ισχύει $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 26

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια περιττή συνάρτηση. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο και στο διάστημα $[-\beta, -\alpha]$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ 1-1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Άσκηση 27

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $(g \circ f)(x) = x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να δείξετε ότι η f είναι "1-1".
- ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2 - 8x + 7) = f(x - 1)$.

Άσκηση 28

Έστω η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \frac{1}{3^x} - 2x$.

- i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι "1-1".
- ii. Να λύσετε την εξίσωση: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-9} - 2 \cdot (x^2 - 9) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+3} - 2 \cdot x - 6$

Άσκηση 29

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(f(x)) + (f(x))^3 = 2x + 4. \text{ Να δείξετε ότι η } f \text{ είναι "1-1".}$$

Άσκηση 30

Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει:

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

- i. $f(1) = 1$
- ii. Η συνάρτηση $g(x) = x^2 - x f(x) + 1, x \in \mathbb{R}$ δεν είναι "1-1".

Άσκηση 31

Έστω η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $g^2(x^2) + 9 \leq 6 \cdot g(2x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι "1-1".

Άσκηση 32

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $f^2(x) \leq f(x) \cdot f(10 - x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι "1-1".

Άσκηση 33

Δίνεται μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, καθώς και οι μιγαδικοί αριθμοί της μορφής

$$z = f(3 - x) + i, \quad w = f(x) + i \cdot f(kx + \lambda^{2014}), \quad x \in \mathbb{R},$$
 όπου οι k, λ είναι σταθεροί πραγματικοί

αριθμοί. Αν είναι γνωστό ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 και ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ο αριθμός $z \cdot w$ είναι φανταστικός, να προσδιορίσετε τον αριθμό k .

Απ: $k=0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Άσκηση 34

Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις αντιστρέφονται και να βρείτε την αντίστροφή τους:

i. $f(x) = \frac{e^x + 3}{e^x}$

Απ: $f^{-1}(x) = \ln \frac{3}{x-1}, x > 1$

ii. $f(x) = \ln(e + e^x)$

Απ: $f^{-1}(x) = \ln(e^x - e), x > 1$

iii. $f(x) = \sqrt{4 + \sqrt{3-x}}$

Απ: $f^{-1}: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = 3 - (x^2 - 4)^2$

iv. $f(x) = \ln(1 + e^x)$

Απ: $f^{-1}: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \ln(e^x - 1)$

v. $f(x) = \ln(2 + e^x) - x$

Απ: $f^{-1}(x) = \ln \frac{2}{e^x - 1}, x > 0$

Άσκηση 35

Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει:

$$f^{2015}(x) + f^3(x) + f(x) - x = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii. Να βρείτε την f^{-1} .

Άσκηση 36

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = 2x + \sqrt{4x^2 + 1} - 1$. Να δείξετε ότι:

i. $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της.

iii. Η f είναι γνησίως αύξουσα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Άσκηση 37

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $f(f(x)) = 9x - 8$.

- i. Να δείξετε ότι η f είναι "1-1".
- ii. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση: $f(9x - 8) = 9 \cdot f(x) - 8$.
- iii. Να βρείτε το $f(1)$.
- iv. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, αν η συνάρτηση f έχει τύπο $f(x) = \alpha \cdot x + \beta$ και είναι γνησίως αύξουσα.

Απ: iii. 1, iv. $\alpha=3, \beta=-2$

Άσκηση 38

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

- i. Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=(-1,1)$.
- ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την f^{-1} .
- iii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g με $g(x) = f(2x + 3)$.

Απ: ii. $f^{-1}(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$, $x \in \mathbb{R}$, iii. $(-2, -1)$

Άσκηση 39

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο: $f(x) = x^3 + 7x - 7$.

- i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=15$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$, την οποία και να βρείτε.

- iii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < -15$.
- iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x)) < 1$.

Άσκηση 40

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + x - 1$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- ii. Να υπολογίσετε το $f^{-1}(1)$.
- iii. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$.
- iv. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(3x + 2) > 1$.

Άσκηση 41

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ και $g(x) = \frac{1}{x}$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.
- ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
- iii. Να βρείτε την f^{-1} .
- iv. Να βρείτε την $f^{-1} \circ g$.

Άσκηση 42

Έστω f, g δύο συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$ οι οποίες ικανοποιούν τις σχέσεις: $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και $(f \circ f - g \circ f)(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- i. Η f είναι αντιστρέψιμη και
- ii. $f^{-1}(x) + g(x) = f(x)$.

Άσκηση 43

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = x^3 + 3x^2 + \ln x - 4$.

- i. Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα.
- ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο πεδίο ορισμού της, την οποία και να προσδιορίσετε.
- iii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$.
- iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(x-3) > e^3 + 3(e^2 - 1)$.

Άσκηση 44

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta = (0, +\infty)$ η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες: α) $f(x) > 0$ για $x > 0$ και β) $f(f(x)) = x \cdot f(x)$ για κάθε $x > 0$. Να αποδείξετε ότι:

- i. Η f είναι αντιστρέψιμη.
- ii. $f(1) = 1$.
- iii. $f^{-1}(x) = \frac{f(x)}{x}, x > 0$.

Άσκηση 45

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- i. $f(0) = 0$.
- ii. Η f είναι περιττή.
- iii. Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το 0, τότε είναι αντιστρέψιμη και ισχύει:
 $f^{-1}(x+y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
- iv. Αν η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$, το 0, τότε η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ είναι αντιστρέψιμη.

Άσκηση 46

Έστω μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το διάστημα $A=(0,+\infty)$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $f(\alpha \cdot \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$ για κάθε $\alpha, \beta \in A$. Να αποδείξετε ότι:

- i. $f(1)=0$.
- ii. $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ για κάθε $x>0$.
- iii. Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα το 1, τότε η f είναι αντιστρέψιμη και ισχύει $f^{-1}(x+y) = f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 47

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες:

α) Υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0) \neq 0$ και β) $f(\alpha+\beta) = f(\alpha) \cdot f(\beta)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

- i. $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ii. $f(0)=1$.
- iii. $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$, $x \in \mathbb{R}$.
- iv. $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- v. Αν η εξίσωση $f(x)=1$ έχει μοναδική ρίζα το 0, τότε η f είναι αντιστρέψιμη και ισχύει:
 $f^{-1}(\alpha \cdot \beta) = f^{-1}(\alpha) + f^{-1}(\beta)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, αν $f(\mathbb{R}) = (0,+\infty)$.