

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

A. ΜΕΡΟΣ :ΘΕΩΡΙΑ

ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ C ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ

Γνωρίζουμε ότι η δευτεροβάθμια εξίσωση με αρνητική διακρίνουσα δεν έχει λύση στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών. Ειδικότερα η εξίσωση $x^2 = -1$ δεν έχει λύση στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, αφού το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού είναι μη αρνητικός αριθμός. Για να ξεπεράσουμε την “αδυναμία” αυτή, διευρύνουμε το σύνολο $\mathbb{R}$ σε ένα σύνολο C , το οποίο να έχει τις ίδιες πράξεις με το $\mathbb{R}$, τις ίδιες ιδιότητες των πράξεων αυτών και στο οποίο να υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $x^2 = -1$, δηλαδή ένα στοιχείο i , τέτοιο, ώστε $i^2 = -1$. Σύμφωνα με τις παραδοχές αυτές το διευρυμένο σύνολο C θα έχει ως στοιχεία:

- Όλους τους πραγματικούς αριθμούς
- Όλα τα στοιχεία της μορφής βi , που είναι γινόμενα των στοιχείων του $\mathbb{R}$ με το i , δηλαδή τους φανταστικούς αριθμούς, το σύνολο των οποίων θα συμβολίζουμε με I , δηλ. $I = \{\beta i / \beta \in \mathbb{R}\}$, και
- Όλα τα αθροίσματα της μορφής $\alpha + \beta i$, με α και β , πραγματικούς αριθμούς.

Τα στοιχεία του C λέγονται **μιγαδικοί αριθμοί** και το C **σύνολο των μιγαδικών αριθμών**. Επομένως:

Το σύνολο C των μιγαδικών αριθμών είναι ένα υπερσύνολο του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, στο οποίο:

- Επεκτείνονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού έτσι, ώστε να έχουν τις ίδιες ιδιότητες όπως και στο $\mathbb{R}$, με το μηδέν (0) να είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης και το ένα (1) το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού,
- Υπάρχει ένα στοιχείο i τέτοιο, ώστε $i^2 = -1$,
- Κάθε στοιχείο z του C γράφεται κατά μοναδικό τρόπο με τη μορφή $z = \alpha + \beta i$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- ❖ Κάθε αριθμός της μορφής $\alpha + \beta i, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ λέγεται **μιγαδικός αριθμός**.
- ❖ Η μορφή $\alpha + \beta i$ ενός μιγαδικού αριθμού z λέγεται **κανονική μορφή** του z .

- ❖ Κάθε μιγαδικός αριθμός $z = \alpha + \beta i$ είναι άθροισμα δυο αριθμών του πραγματικού α και του φανταστικού βi .
- ❖ Ο α λέγεται **πραγματικό μέρος** του z και σημειώνεται $\text{Re}(z)$, ενώ ο β (και όχι ο βi) λέγεται **φανταστικό μέρος** του z και σημειώνεται $\text{Im}(z)$.
- ❖ Κάθε πραγματικός αριθμός α γράφεται σε κανονική μορφή ως $\alpha + 0i$.
- ❖ Κάθε φανταστικός αριθμός βi γράφεται σε κανονική μορφή ως $0 + \beta i$.
- ❖ Ένας μιγαδικός αριθμός $z = \alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \neq 0$ λέγεται καθαρά μιγαδικός αριθμός.
- ❖ Ο αριθμός 0 είναι και φανταστικός αφού $0 = 0i$ αλλά και μιγαδικός με κανονική μορφή $0 + 0i$.
- ❖ Στη συνέχεια, όταν λέμε ο μιγαδικός $z = \alpha + \beta i$, εννοούμε ότι οι α και β είναι πραγματικοί αριθμοί και το γεγονός αυτό δε θα τονίζεται ιδιαίτερα.
- ❖ Ένας μιγαδικός αριθμός $z \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0$
- ❖ Ένας μιγαδικός αριθμός $z \in \mathcal{I} \Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0$

Προσοχή!!!! Οι δύο παραπάνω ισοδυναμίες είναι πάρα πολύ χρήσιμες για τις ασκήσεις!!!!

ΙΣΟΤΗΤΑ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

- ❖ Επειδή κάθε μιγαδικός αριθμός z γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή $\alpha + \beta i$, δύο μιγαδικοί αριθμοί $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ είναι ίσοι, αν και μόνο αν $\alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$. Δηλαδή ισχύει:

$$\alpha + \beta i = \gamma + \delta i \Leftrightarrow \alpha = \gamma \text{ και } \beta = \delta.$$

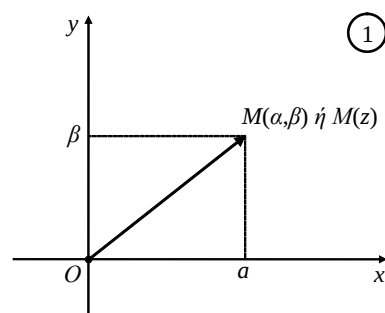
- ❖ Επομένως, επειδή $0 = 0 + 0i$, έχουμε

$$\alpha + \beta i = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ και } \beta = 0.$$

- ❖ Στην επέκταση, όμως, από το $\mathcal{R}$ στο $\mathcal{C}$ ενώ οι πράξεις και οι ιδιότητες αυτών που ισχύουν στο $\mathcal{R}$ εξακολουθούν να ισχύουν και στο $\mathcal{C}$, εν τούτοις η **διάταξη και οι ιδιότητές της δε μεταφέρονται**.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ

- ❖ Κάθε μιγαδικό αριθμό $z = \alpha + \beta i$ μπορούμε να τον αντιστοιχίσουμε στο σημείο $M(\alpha, \beta)$ ενός καρτεσιανού επιπέδου.
- ❖ Αλλά και *αντιστρόφως*, κάθε σημείο $M(\alpha, \beta)$ του καρτεσιανού αυτού επιπέδου μπορούμε να το αντιστοιχίσουμε στο μιγαδικό $\alpha + \beta i$.
- ❖ Το σημείο $M(\alpha, \beta)$ λέγεται **εικόνα** του μιγαδικού $z = \alpha + \beta i$, και το συμβολίζουμε με $M(z)$.
- ❖ Ένα καρτεσιανό επίπεδο του οποίου τα σημεία είναι εικόνες μιγαδικών αριθμών θα αναφέρεται ως **μιγαδικό επίπεδο**.
- ❖ Ο άξονας x' λέγεται **πραγματικός άξονας**, αφού ανήκουν σε αυτόν τα σημεία $M(\alpha, 0)$ που είναι εικόνες των πραγματικών αριθμών $\alpha = \alpha + 0i$.
- ❖ Ο άξονας y' λέγεται **φανταστικός άξονας**, αφού ανήκουν σε αυτόν τα σημεία $M(0, \beta)$ που είναι εικόνες των φανταστικών $\beta i = 0 + \beta i$.
- ❖ Ένας μιγαδικός $z = \alpha + \beta i$ παριστάνεται επίσης και με τη διανυσματική ακτίνα, $\overrightarrow{OM}$, του σημείου $M(\alpha, \beta)$.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ(+,-,·,÷)

Σύμφωνα με τον ορισμό του $\mathbb{C}$ η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός δύο μιγαδικών αριθμών γίνονται όπως ακριβώς και οι αντίστοιχες πράξεις με διώνυμα $\alpha + \beta x$ στο $\mathbb{R}$ όπου βέβαια αντί για x έχουμε i . Έτσι:

- ❖ Για την **πρόσθεση** δύο μιγαδικών αριθμών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ έχουμε: $(\alpha + \beta i) + (\gamma + \delta i) = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)i$.
- ❖ Για την **αφαίρεση** του μιγαδικού αριθμού $\gamma + \delta i$ από τον $\alpha + \beta i$, επειδή ο αντίθετος του μιγαδικού $\gamma + \delta i$ είναι ο μιγαδικός $-\gamma - \delta i$, έχουμε:
 $(\alpha + \beta i) - (\gamma + \delta i) = (\alpha + \beta i) + (-\gamma - \delta i) = (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta)i$.
 Δηλαδή: $(\alpha + \beta i) - (\gamma + \delta i) = (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta)i$.

Δηλαδή: $z+w = \operatorname{Re}(z+w) + \operatorname{Im}(z+w)i$

με: $\operatorname{Re}(z+w) = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(w)$ και $\operatorname{Im}(z+w) = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(w)$

Και: $z-w = \operatorname{Re}(z-w) + \operatorname{Im}(z-w)i$

με: $\operatorname{Re}(z-w) = \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(w)$ και $\operatorname{Im}(z-w) = \operatorname{Im}(z) - \operatorname{Im}(w)$

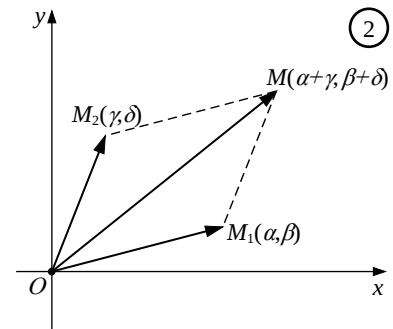
Γραφική παράσταση πρόσθεσης:

Αν $M_1(\alpha, \beta)$ και $M_2(\gamma, \delta)$ είναι οι εικόνες των $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο, τότε το άθροισμα

$$(\alpha + \beta i) + (\gamma + \delta i) = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)i$$

παριστάνεται με το σημείο $M(\alpha + \gamma, \beta + \delta)$.

Επομένως, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$, δηλαδή:



“Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους”.

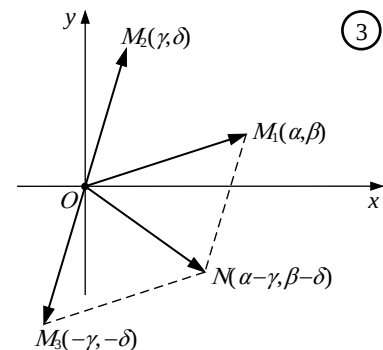
Γραφική παράσταση διαφοράς:

Επίσης, η διαφορά

$$(\alpha + \beta i) - (\gamma + \delta i) = (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta)i$$

παριστάνεται με το σημείο $N(\alpha - \gamma, \beta - \delta)$.

Επομένως, $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}$, δηλαδή:



“Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους”.

❖ Για τον **πολλαπλασιασμό** δύο μιγαδικών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ έχουμε:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta i)(\gamma + \delta i) &= \alpha(\gamma + \delta i) + \beta i(\gamma + \delta i) = \alpha\gamma + \alpha\delta i + \beta\gamma i + (\beta i)(\delta i) = \\ &= \alpha\gamma + \alpha\delta i + \beta\gamma i + \beta\delta i^2 = \alpha\gamma + \alpha\delta i + \beta\gamma i - \beta\delta = (\alpha\gamma - \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma)i \end{aligned}$$

$$\text{Δηλαδή: } (\alpha + \beta i)(\gamma + \delta i) = (\alpha\gamma - \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma)i.$$

❖ Ειδικότερα, έχουμε: $(\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i) = \alpha^2 + \beta^2$. Ο αριθμός $\alpha - \beta i$ λέγεται **συζυγής** του $\alpha + \beta i$ και συμβολίζεται με $\overline{\alpha + \beta i}$.

$$\text{Δηλαδή: } \overline{\alpha + \beta i} = \alpha - \beta i.$$

Επειδή είναι και $\overline{\alpha - \beta i} = \alpha + \beta i$, οι $\alpha + \beta i$, $\alpha - \beta i$ λέγονται **συζυγείς μιγαδικοί**.

❖ Τέλος, για να εκφράσουμε το **πηλίκο** $\frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i}$, όπου $\gamma + \delta i \neq 0$,

στη μορφή $\kappa + \lambda i$, πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με το συζυγή του παρονομαστή και έχουμε:

$$\frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i} = \frac{(\alpha + \beta i)(\gamma - \delta i)}{(\gamma + \delta i)(\gamma - \delta i)} = \frac{(\alpha\gamma + \beta\delta) + (\beta\gamma - \alpha\delta)i}{\gamma^2 + \delta^2} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2}i$$

Δηλαδή, $\frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2}i$.

ΔΥΝΑΜΗ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Οι δυνάμεις ενός μιγαδικού z με εκθέτη ακέραιο ορίζονται όπως ακριβώς οι δυνάμεις των πραγματικών.

Δηλαδή:

- $z^0 = 1$, με $z \neq 0$
- $z^1 = z$
- $z^2 = z \cdot z$,
- $z^v = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{v-\phiορές}$
- $z^{-v} = \frac{1}{z^v}$, όπου $v \in \mathbb{N}^*$, $z \neq 0$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Παρότι οι δυνάμεις με ακέραιο εκθέτη στους μιγαδικούς αριθμούς ορίζονται όπως ακριβώς ορίζονται και στους πραγματικούς, η αλήθεια είναι ότι με την κανονική μορφή ενός μιγαδικού πολύ λίγες περιπτώσεις μιγαδικών υψωμένων σε δύναμη μπορούμε να υπολογίσουμε (χρειάζεται να ξέρουμε την τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού που όμως είναι εκτός ύλης για τις εξετάσεις).

Για τον λόγο που αναφέραμε παραπάνω θα δώσουμε θεωρητικά μερικές περιπτώσεις μιγαδικών που μπορούμε να βρούμε τη δύναμή τους.

- ❖ Για τις δυνάμεις του i έχουμε: $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$,
 $i^3 = i^2 i = -i$. Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι είναι:
 $i^4 = i^2 i^2 = 1$, $i^5 = i^4 i = 1 \cdot i = i$, $i^6 = i^4 i^2 = 1 \cdot i^2 = -1$, $i^7 = i^4 i^3 = 1 \cdot i^3 = -i$
δηλαδή, μετά το i^4 οι τιμές του i^v επαναλαμβάνονται.
Άρα, για να υπολογίσουμε συγκεκριμένη δύναμη του i ,
γράφουμε τον εκθέτη v στη μορφή $v = 4\rho + \upsilon$, όπου ρ το πηλίκο και υ το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του v με το 4, οπότε έχουμε:

$$i^{\nu} = i^{4\rho+\nu} = i^{4\rho} i^{\nu} = (i^4)^{\rho} i^{\nu} = 1^{\rho} i^{\nu} = i^{\nu} = \begin{cases} 1 & \alpha\gamma & 0\omega = \\ i & \nu, \alpha\nu & 1\equiv \\ -1 & \alpha\gamma & 2\omega = \\ -i & \nu, \alpha\nu & 3\equiv \end{cases}$$

- ❖ Για κάθε φανταστικό αριθμό $z = \beta i$ μπορούμε να βρούμε οποιαδήποτε δύναμή του αφού $(\beta \cdot i)^{\kappa} = \beta^{\kappa} \cdot i^{\kappa}$.
- ❖ Για τις δυνάμεις z^2, z^3, z^4, z^6 , μπορούμε να τις υπολογίσουμε (θεωρητικά εύκολα αλλά πρακτικά με πολλές πράξεις) για κάθε μιγαδικό αριθμό $z = \alpha + \beta i$, χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες : $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$, $(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 - y^3$, και την παρατήρηση ότι : $x^4 = (x^2)^2$ και $x^6 = (x^2)^3$.
- ❖ Μπορούμε να υπολογίσουμε δυνάμεις μιγαδικών που είναι υψωμένοι σε άρτιο εκθέτη και ισχύει $\text{Re}(z) = \pm \text{Im}(z)$.
Για παράδειγμα : $(\alpha + \alpha i)^{2\nu}$ αφού $(\alpha + \alpha i)^{2\nu} = \left((\alpha + \alpha i)^2\right)^{\nu} =$
 $\left(\alpha^2 + 2\alpha \cdot \alpha i + (\alpha i)^2\right)^{\nu} = \left(\alpha^2 + 2\alpha^2 i - \alpha^2\right)^{\nu} = \left(2\alpha^2 i\right)^{\nu} = \left(2\alpha^2\right)^{\nu} \cdot i^{\nu}$.

ΣΥΖΥΓΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

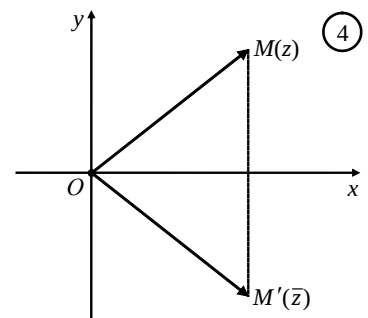
Επειδή οι συζυγείς μιγαδικοί, όπως θα δούμε στις επόμενες παραγράφους, μας διευκολύνουν στη μελέτη των μιγαδικών αριθμών, θα αναφερθούμε ιδιαίτερος σε αυτούς.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Για έναν μιγαδικό αριθμό $z = \alpha + \beta i$ ορίζουμε ως συζυγή του αριθμού z τον μιγαδικό $\bar{z} = \alpha - \beta i$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

- ❖ Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες $M(\alpha, \beta)$ και $M'(\alpha, -\beta)$ δύο συζυγών μιγαδικών $z = \alpha + \beta i$ και $\bar{z} = \alpha - \beta i$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.



- ❖ Ισχύει: $\overline{(\bar{z})} = z$ (αφού $\overline{(\alpha - \beta i)} = \alpha + \beta i$ με εφαρμογή του ορισμού)

- ❖ Για δύο συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς $z = \alpha + \beta i$ και $\bar{z} = \alpha - \beta i$ ισχύει : $z + \bar{z} = 2\alpha$
 $z - \bar{z} = 2\beta i$.

Συνήθως στις ασκήσεις οι δυο πιο πάνω ιδιότητες θα χρησιμοποιούνται με τη μορφή:

$$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z), \quad z - \bar{z} = 2\operatorname{Im}(z) \cdot i,$$

και πιο σπάνια στη μορφή

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2 \cdot i}$$

- ❖ Αν $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$ είναι δυο μιγαδικοί αριθμοί, τότε:

1.	$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
2.	$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
3.	$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
4.	$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

Οι ιδιότητες αυτές μπορούν να αποδειχτούν με εκτέλεση των πράξεων. Για παράδειγμα έχουμε:

Απόδειξη της 1: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(\alpha + \beta i) + (\gamma + \delta i)} = \overline{(\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)i}$
 $= (\alpha + \gamma) - (\beta + \delta)i = (\alpha - \beta i) + (\gamma - \delta i) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$

5. $\overline{z_1 + z_2 + \dots + z_n} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_n$ (Γενίκευση της 1)

6. $\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot \dots \cdot \bar{z}_n.$ (Γενίκευση της 3)

7. $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$ (αν είναι $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$, και εφαρμόσουμε την ιδιότητα 6)

ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ: $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$.

Επειδή $i^2 = -1$ και $(-i)^2 = i^2 = -1$, εύκολα, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι και κάθε εξίσωση δεύτερου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει πάντα λύση στο σύνολο $\mathbb{C}$.

Πράγματι, έστω η εξίσωση $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$.

Εργαζόμαστε όπως στην αντίστοιχη περίπτωση στο $\Re$ και τη μετασχηματίζουμε, με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων, στη μορφή: $\left(z + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\Delta}{4\alpha^2}$, όπου $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ η διακρίνουσα της εξίσωσης. Έτσι, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $\Delta > 0$. Τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές λύσεις:

$$z_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

- $\Delta = 0$. Τότε έχει μια διπλή πραγματική λύση: $z = \frac{-\beta}{2\alpha}$

- $\Delta < 0$. Τότε, επειδή $\frac{\Delta}{4\alpha^2} = \frac{(-1)(-\Delta)}{4\alpha^2} = \frac{i^2(\sqrt{-\Delta})^2}{(2\alpha)^2} = \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$,

η εξίσωση γράφεται: $\left(z + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$.

Άρα οι λύσεις της είναι: $z_{1,2} = \frac{-\beta \pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$, οι οποίες είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- ❖ Παρατηρούμε ότι και εδώ ισχύουν οι σχέσεις:

$$z_1 + z_2 = \frac{-\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad z_1 \cdot z_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{Τύποι του Vieta.}$$

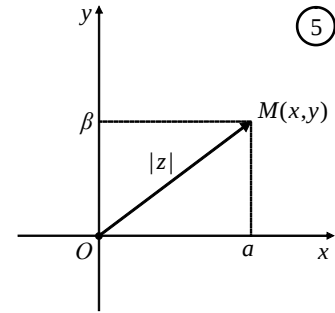
Χρησιμοποιούνται συνήθως όταν σε μια 2^{ου} βαθμού εξίσωση με πραγματικούς συντελεστές ξέρουμε μια μιγαδική λύση και έχουμε άγνωστο συντελεστή στην εξίσωση!

- ❖ Προσοχή!!!! Αν σε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού έχουμε μιγαδικούς συντελεστές (έστω κι έναν) ή το συζυγή του άγνωστου μιγαδικού δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ούτε τη διακρίνουσα ούτε τους τύπους του Vieta. Τότε καταφεύγουμε στην παλιά καλή συνταγή της αντικατάστασης του άγνωστου μιγαδικού με $x+yi$.

ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Έστω $M(x, y)$ η εικόνα του μιγαδικού $z = x + yi$ στο μιγαδικό επίπεδο. Ορίζουμε ως **μέτρο** του z την απόσταση του M από την αρχή O , δηλαδή

$$|z| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Όταν ο μιγαδικός z είναι της πραγματικός,

δηλαδή της μορφής $z = x + 0i = x \in \mathbb{R}$, τότε $|z| = \sqrt{x^2 + 0^2} = |x|$, που είναι η γνωστή μας απόλυτη τιμή του πραγματικού αριθμού x .

Αν $z = x + yi$, τότε $\bar{z} = x - yi$, $-z = -x - yi$ και $-\bar{z} = -x + yi$, και άρα $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$, και $|z|^2 = x^2 + y^2$ επίσης $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$ άρα $|z|^2 = z\bar{z}$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

❖ Δύο προφανείς ιδιότητες από τα παραπάνω είναι:

- $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$
- $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

Δύο πολύ σημαντικές ιδιότητες για τις ασκήσεις παρακάτω, ειδικά για δύσκολα θέματα!!!!

❖ Οι επόμενες ιδιότητες αναφέρονται στις σχέσεις που συνδέουν το γινόμενο και το πηλίκο μιγαδικών με τα μέτρα τους και είναι ίδιες με τις αντίστοιχες ιδιότητες των απόλυτων τιμών πραγματικών αριθμών.

Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε

- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

Απόδειξη:

Πράγματι, έχουμε: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow |z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$

$$\Leftrightarrow (z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1 \cdot z_2}) = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2 \Leftrightarrow z_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2$$

και, επειδή η τελευταία ισότητα ισχύει, θα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική.

Ανάλογα αποδεικνύεται και η δεύτερη ιδιότητα.

Γενικά, αποδεικνύεται ότι :

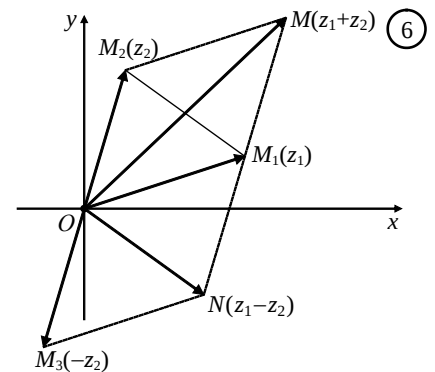
- $|z_1 z_2 \dots z_n| = |z_1| |z_2| \dots |z_n|$ και
- $|z^n| = |z|^n$

- ❖ Από τη γνωστή μας τριγωνική ανισότητα και από τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος $z_1 + z_2$ και της διαφοράς $z_1 - z_2$ δύο μιγαδικών προκύπτει ότι:

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

αλλά και ότι

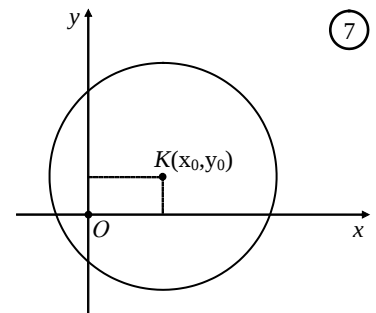
$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$



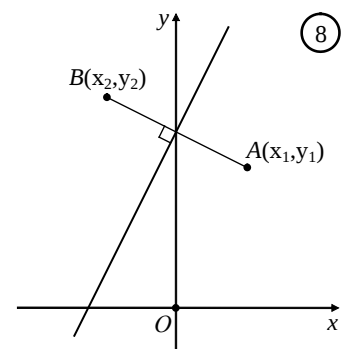
- ❖ Επίσης, είναι φανερό ότι το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{ON}$ είναι ίσο με το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{M_2M_1}$. Επομένως:

“Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους”. Δηλαδή: $(M_1M_2) = |z_1 - z_2|$

- ❖ Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, με $\rho > 0$ και $z_0 = x_0 + y_0i$ παριστάνει τον **κύκλο** με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ .
- ❖ Ειδικά η εξίσωση $|z| = \rho$, με $\rho > 0$ παριστάνει **κύκλο** με κέντρο την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και ακτίνα ρ .



- ❖ Η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$, όπου $z_1 = x_1 + y_1i$, $z_2 = x_2 + y_2i$, παριστάνει τη **μεσοκάθετο** του τμήματος με άκρα τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$.



ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$$\triangleright z \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0, z \in I \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$$

$$\text{Απόδειξη: } z = \bar{z} \Leftrightarrow \alpha + \beta i = \alpha - \beta i \Leftrightarrow 2\beta i = 0 \Leftrightarrow \beta = 0 \Leftrightarrow z \in \mathfrak{R}$$

$$\triangleright z \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z, z \in I \Leftrightarrow \bar{z} = -z$$

Απόδειξη:

$$z = -\bar{z} \Leftrightarrow \alpha + \beta i = -\alpha + \beta i \Leftrightarrow 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \Leftrightarrow z \in I$$

(τις δυο παραπάνω σχέσεις όταν τις χρησιμοποιούμε πρέπει να αποδεικνύονται)

$$\triangleright |z| = \rho > 0 \Leftrightarrow z\bar{z} = \rho^2 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{\rho^2}{z}$$

$$\triangleright \text{Αν } z_1, z_2 \in \mathbb{C} \text{ και ισχύει } f(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow f(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = 0,$$

$$\triangleright \text{Αν } z_1, z_2 \in \mathbb{C} \text{ και ισχύει } |f(z_1, z_2)| = |f(\bar{z}_1, \bar{z}_2)|$$

$$\triangleright |f(z)| = |g(z)| \Leftrightarrow |f(z)|^2 = |g(z)|^2 \Leftrightarrow f(z)f(\bar{z}) = g(z)g(\bar{z})$$

$$\triangleright z^\vee = z_0 \Leftrightarrow |z^\vee| = |z_0| \Leftrightarrow |z| = \sqrt[\vee]{|z_0|}$$

ΒΑΣΙΚΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

Γενικά όταν θέλουμε να βρούμε έναν γεωμετρικό τόπο ενός μιγαδικού z , τότε θέτουμε $z = x + yi$ και προσπαθούμε μέσα από την σχέση που μας δίνουν να βρούμε την σχέση που συνδέει τα x, y .

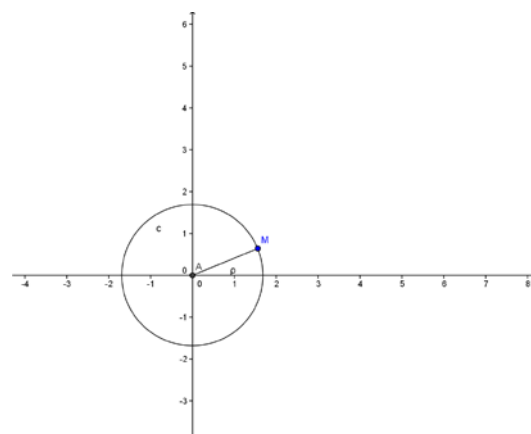
Όμως υπάρχουν και μερικές σχέσεις οι οποίες μας φανερώνουν αμέσως τον γεωμετρικό τόπο.

Αυτές οι σχέσεις είναι:

$$\diamond |z| = \rho, \rho > 0$$

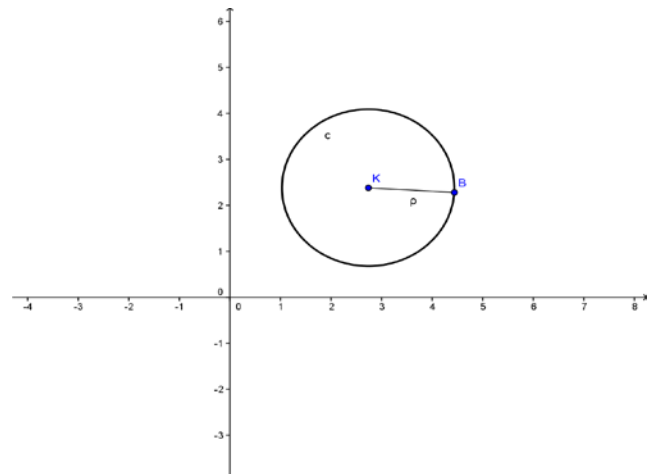
Ο γεωμετρικός τόπος είναι **κύκλος**

K(0,0) και ακτίνα ρ .



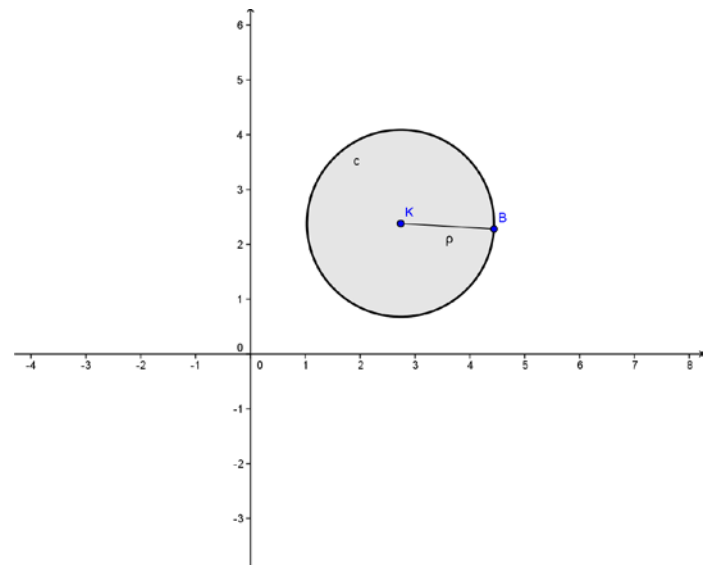
❖ $|z-z_0|=\rho$, $\rho>0$

Ο γεωμετρικός τόπος είναι
κύκλος κέντρου $K(z_0)$ και
ακτίνας ρ .



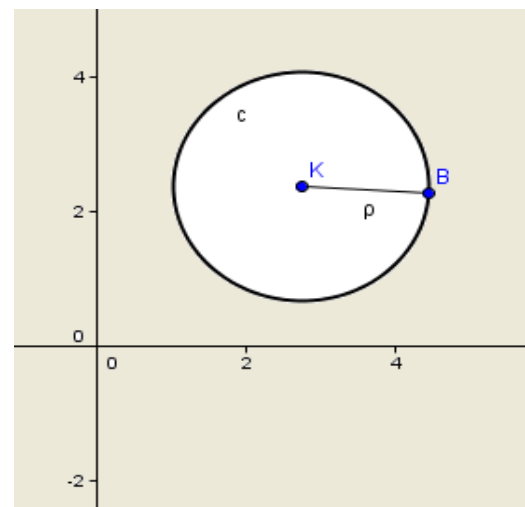
❖ $|z-z_0|\leq\rho$

Ο γεωμετρικός τόπος είναι ο
κυκλικός δίσκος $K(z_0)$ και
ακτίνας ρ .



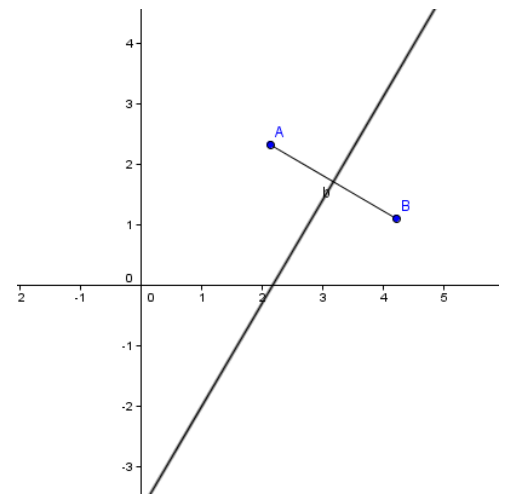
❖ $|z-z_0|>\rho$

Ο γεωμετρικός τόπος είναι όλα τα
εξωτερικά σημεία του κύκλου $K(z_0)$
και ακτίνας ρ .



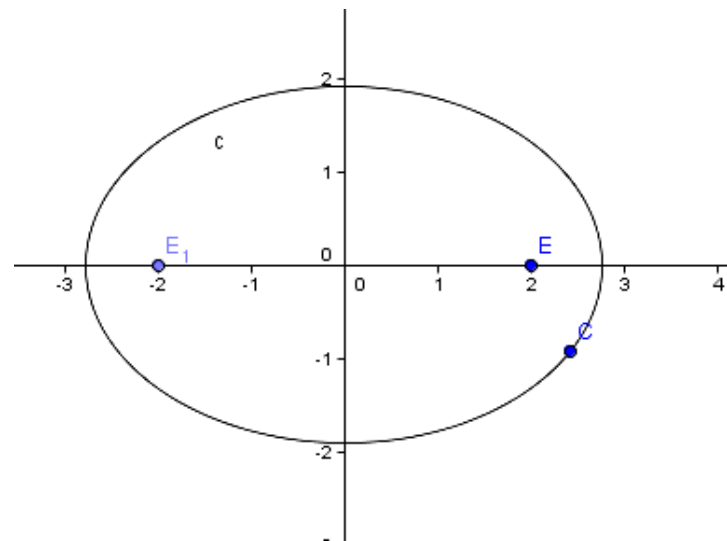
❖ $|z-z_1|=|z-z_2|$

Ο γεωμετρικός τόπος είναι η **μεσοκάθετος** του τμήματος AB με $A(z_1)$ και $B(z_2)$.



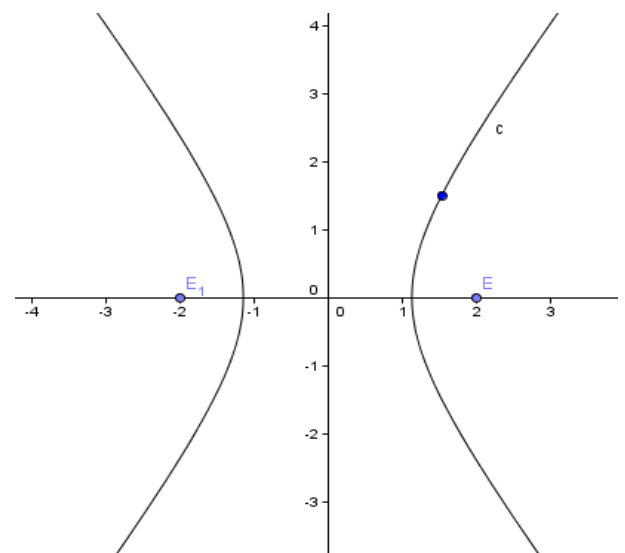
❖ $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$, με $a>0$

Ο γεωμετρικός τόπος είναι **έλλειψη** με εστίες $E_1(z_1)$, $E(z_2)$ και σταθερό άθροισμα $2a$.



❖ $||z-z_1|-|z-z_2||=2a$, $a>0$

Ο γεωμετρικός τόπος είναι **υπερβολή** με εστίες $E_1(z_1)$, $E(z_2)$ και σταθερή διαφορά $2a$.



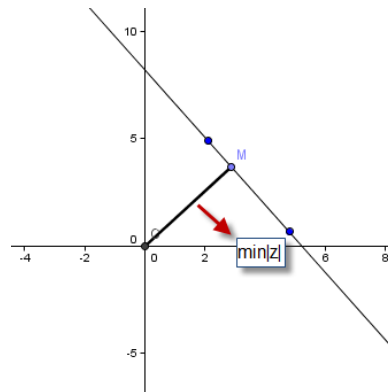
ΜΕΓΙΣΤΟ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΤΟΥ $|z|$ ΚΑΙ ΤΟΥ $|z_1 - z_2|$

Έστω M, M_1, M_2 οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο. Για να βρούμε το μέγιστο και το ελάχιστο του μέτρου του z και της διαφοράς του μέτρου $z_1 - z_2$ πρέπει να γνωρίζουμε τους γεωμετρικούς τύπους πάνω στους οποίους βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών.

Συγκεκριμένα :

❖ Αν το M βρίσκεται σε ευθεία ε τότε:

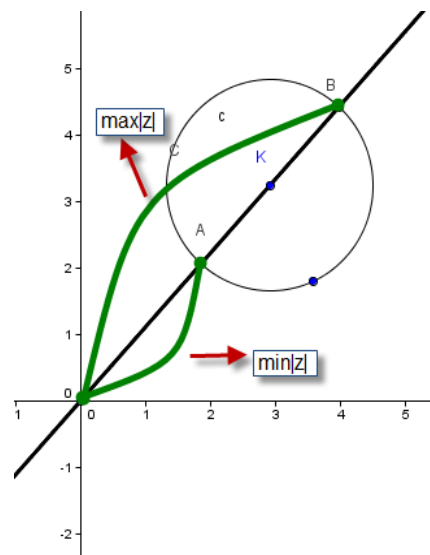
$$\min|z| = d(O, \varepsilon)$$



❖ Αν το M βρίσκεται σε κύκλο (K, ρ) τότε:

$$\min|z| = (OA) = |(OK) - \rho|$$

$$\max|z| = (OB) = (OK) + \rho$$

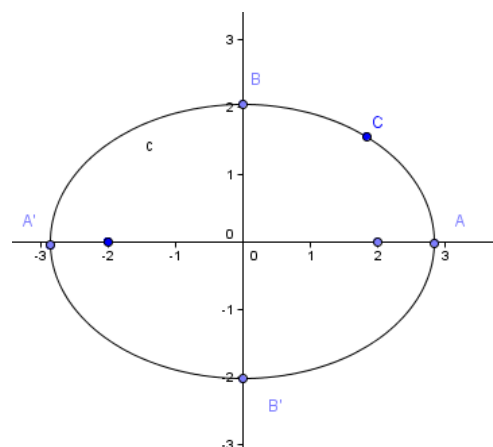


❖ Αν το M βρίσκεται στην έλλειψη C :

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \text{ τότε:}$$

$$\min|z| = (OB) = (OB') = \beta$$

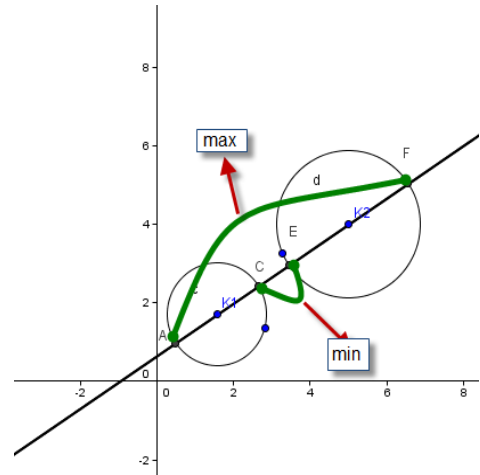
$$\max|z| = (OA) = (OA') = \alpha$$



- ❖ Αν οι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 βρίσκονται αντίστοιχα στους κύκλους (K_1, ρ_1) και (K_2, ρ_2) με $K_1 K_2 > \rho_1 + \rho_2$ τότε :

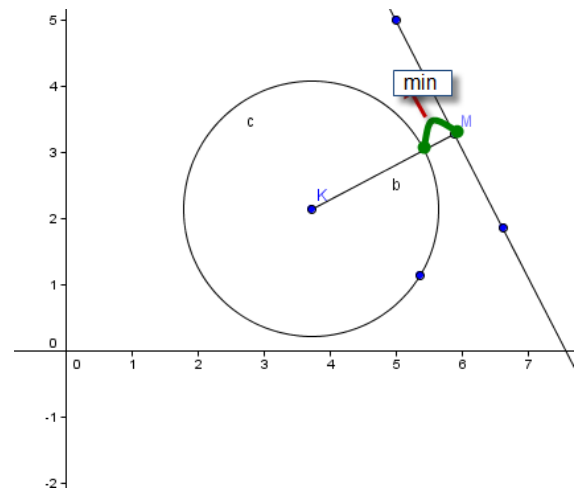
$$\min |z_1 - z_2| = (K_1 K_2) - \rho_1 - \rho_2$$

$$\max |z_1 - z_2| = (K_1 K_2) + \rho_1 + \rho_2$$



- ❖ Αν οι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 βρίσκονται αντίστοιχα στον κύκλο (K, ρ) και στην ευθεία ε τότε:

$$\min |z_1 - z_2| = |d(K, \varepsilon) - \rho|$$



B. ΜΕΡΟΣ: ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A. ΟΜΑΔΑ : ΟΡΙΣΜΟΙ-ΠΡΑΞΕΙΣ -ΣΥΖΥΓΕΙΣ

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ (Πρόσθεση- Αφαίρεση-Πολ/σμος – Διαίρεση)

1) ✎ Να γράψετε τους παρακάτω μιγαδικούς στην κανονική τους μορφή:

$$\alpha) z_1 = (4 - 3i) + (3 - 2i)$$

$$\beta) z_2 = (-3 + 2i) + (-5 - i)$$

$$\gamma) z_3 = (2 - i) - (-3 + 2i)$$

$$\delta) z_4 = (-1 - i) - (-3 + 2i)$$

$$\epsilon) z_5 = (2 + i) \cdot (4 - 2i)$$

$$\sigma\tau) z_6 = (-2 - 3i) \cdot (5 - i)$$

$$\zeta) z_7 = 2 - 3i \cdot (1 - 2i) + 3i$$

$$\eta) z_8 = 4 \cdot (2 - i) - 3i + i \cdot (2 - 3i)$$

$$\theta) z_9 = (2 - 3i)(4 - 5i) + 7i - 1$$

$$\iota) z_{10} = 2i \cdot (1 - i) \cdot (2 - 3i)$$

2) ✎ Να γράψετε τους παρακάτω μιγαδικούς στην κανονική τους μορφή:

$$\alpha) z_1 = (1 - i)(1 + i)$$

$$\beta) z_2 = (3 + 2i)(3 - 2i)$$

$$\gamma) z_3 = (5 - 3i)(5 + 3i)$$

$$\delta) z_4 = (\sqrt{2} - i)(\sqrt{2} + i)$$

$$\epsilon) z_5 = (3 - \sqrt{2}i) \cdot (3 + \sqrt{2}i)$$

$$\sigma\tau) z_6 = (-2 + 2\sqrt{3}i) \cdot (-2 - 2\sqrt{3}i)$$

$$\zeta) z_7 = ((x - 2) + 2yi)((x - 2) - 2yi)$$

$$\eta) z_8 = (x - (y - 3)i)(x + (y - 3)i)$$

3) ✎ Να γράψετε τους παρακάτω μιγαδικούς στην κανονική τους μορφή:

$$\alpha) z_1 = \frac{2 + 3i}{4}$$

$$\beta) z_2 = \frac{3 + i}{2i}$$

$$\gamma) z_3 = \frac{1 - i}{-i + 1}$$

$$\delta) z_3 = \frac{2 + 3i}{3 - i}$$

$$\epsilon) z_5 = \frac{5 - 2i}{1 - 2i}$$

$$\sigma\tau) z_6 = \frac{\sqrt{2} + i}{\sqrt{2} - 3i}$$

$$\zeta) z_7 = \frac{1 - xi}{x + i}$$

$$\eta) z_8 = \frac{2}{\eta\mu\theta + i\sigma\upsilon\nu\theta}$$

$$\theta) z_9 = \frac{1}{2\sigma\upsilon\nu\theta - 2i\eta\mu\theta}$$

$$\iota) z_{10} = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta i}$$

$$\iota\alpha) z_{11} = \frac{(2 + 3i)(-i + 1)}{1 - 2i}$$

$$\iota\beta) z_{12} = \frac{1 - 2i}{i + 3} \cdot \frac{2i + 1}{3i + 1}$$

$$\iota\gamma) z_{13} = \frac{12 + 8i}{2 - 3i} + \frac{2i + 1}{3i + 1}$$

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ (Χωρίς χρήση της
τριγωνομετρικής μορφής μιγαδικού)

4) ✎ Να γράψετε τους παρακάτω μιγαδικούς στην κανονική τους μορφή:

$$\alpha) z_1 = (1 + 2i)^2 \quad \beta) z_2 = (3 - 2i)^2 \quad \gamma) z_3 = (1 - 2\sqrt{3}i)^2$$

$$\delta) z_4 = \frac{i-1}{i} - \frac{2}{(1-i)^2} \quad \varepsilon) z_5 = \left(\frac{1-i}{i+1}\right)^2 \quad \sigma\tau) z_6 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$$

$$\zeta) z_7 = (1-i)^3 \quad \eta) z_8 = (2-i)^3$$

5) ✎ Να υπολογιστούν τα αθροίσματα :

$$\alpha) 1 + 2i^2 + 4i^4 + 5i^6 \quad \beta) \frac{1}{i} + \frac{2}{i^2} + \frac{3}{i^3} + \frac{4}{i^4}$$

$$\gamma) i^{22} + i^{2009} + i^{12} + i^{2011} \quad \delta) i^{1955} + i^{1956} + i^{1957} + i^{1958}$$

$$\varepsilon) \frac{1}{i^7} + \frac{1}{i^{21}} + \frac{1}{i^{72}} \quad \sigma\tau) \frac{1}{i^{1975}} + \frac{1}{i^{1976}} + \frac{1}{i^{1977}} + \frac{1}{i^{1978}}$$

6) ✎ Να υπολογιστούν τα παρακάτω αθροίσματα και γινόμενα :

$$\alpha) i + i^2 + i^3 + \dots + i^{102}$$

$$\beta) i - i^2 + i^3 - i^4 + i^5 - \dots + i^{2\nu+1}, \nu \in \mathbb{N}^*$$

$$\gamma) i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{4\nu}, \nu \in \mathbb{N}^*$$

$$\delta) i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{4\nu+1}, \nu \in \mathbb{N}^*$$

$$\varepsilon) i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{4\nu+3}, \nu \in \mathbb{N}^*$$

$$\sigma\tau) i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot \dots \cdot i^{100}$$

$$\zeta) i \cdot i^3 \cdot i^5 \cdot i^7 \cdot \dots \cdot i^{51}$$

$$\eta) i \cdot i^3 \cdot i^5 \cdot i^7 \cdot \dots \cdot i^{2012}$$

$$\theta) i \cdot i^3 \cdot i^5 \cdot i^7 \cdot \dots \cdot i^{2013}$$

7) ✎ Να υπολογιστούν οι παρατάσεις :

$$\alpha) (1+i)^{20} \quad \beta) (1+i)^{21} \quad \gamma) (\sqrt{2}-i)^6 \quad \delta) (2-i)^5 (2+i)^5$$

$$\varepsilon) (2-i)^5 (2+i)^6 \quad \sigma\tau) (1-\sqrt{3}i)^5 (1+\sqrt{3}i)^6 \quad \zeta) \frac{(x+i)^5}{(1-xi)^5} \quad \eta) \frac{(x+i)^7}{(1-xi)^8}$$

8) ✎ Να υπολογιστούν οι παρατάσεις :

$$\alpha) (1+i)^{20} - (1-i)^{20} \quad \beta) (1+i)^{10} - (1-i)^{10}$$

$$\gamma) (2+2i)^{20} + (2-2i)^{20} \quad \delta) (2+2i)^{10} + (2-2i)^{10}$$

$$\varepsilon) (1+i)^{2010} - (1-i)^{2010} \quad \sigma\tau) (1+i)^{2008} + (1-i)^{2008}$$

$$\zeta) (\alpha + \alpha i)^{2\kappa} + (\alpha - \alpha i)^{2\kappa}, \kappa \in \mathbb{N} \ \& \ \kappa = \text{ρτιος}$$

$$\eta) (\alpha + \alpha i)^{2\kappa} + (\alpha - \alpha i)^{2\kappa}, \kappa \in \mathbb{N} \ \& \ \kappa = \text{περιττ} \ \varsigma$$

9) ✎ Να αποδείξετε ότι : $(\alpha + \beta i)^{20} + (\beta - \alpha i)^{20} = 0$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

10) ✎ Να αποδείξετε ότι : $(2 + 3i)^{1002} + (3 - 2i)^{1002} = 0$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

11) ✎ Αν $v \in \mathbb{N}$ και $f(v) = i^v + i^{-v}$, να αποδείξετε ότι :

$$f(4\kappa) + f(4\kappa + 1) + f(4\kappa + 2) + f(4\kappa + 3) = 0.$$

12) ✎ Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $v \in \mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι : $\left(\frac{\lambda + i}{1 - \lambda i}\right)^{4v} + \left(\frac{i - \lambda}{1 + \lambda i}\right)^{4v} = 2$.

13) ✎ Αν $v \in \mathbb{N}^*$, $z \in \mathbb{C}$ και $f(z) = i^v \cdot z$, να αποδείξετε ότι :

$$f(4\kappa) + f(4\kappa + 1) + f(4\kappa + 2) + f(4\kappa + 3) = 0.$$

14) ✎ Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $z^2 - z + 1 = 0$ να αποδείξετε

ότι: α) $z^3 = -1$ και β) $z^{62} - z^{121} + 1 = 0$

15) ✎ Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $z^2 - z + 1 = 0$ να αποδείξετε

ότι: α) $z^3 = -1$ β) $z^{40} + z^{20} + 1 = 0$ γ) $z^{70} + \frac{1}{z^{70}} = -1$

16) ✎ Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $z^2 - z + 1 = 0$ να αποδείξετε

ότι: α) $z^3 = -1$ β) $z^{6\kappa+2} + z^{6\lambda+1} + 1 = 0$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$

17) ✎ Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $z^2 + z + 1 = 0$ να αποδείξετε

ότι: α) $z^3 = 1$ β) $z^{2012} + z^{2011} + 1 = 0$ γ) $z^{70} + \frac{1}{z^{70}} = -1$

18) ✎ Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $z + \frac{1}{z} = -1$ να αποδείξετε ότι:

α) $z^3 = 1$ β) $z^{200} + z^{100} + 1 = 0$

19) ✎ Έστω z, w δύο μιγαδικοί αριθμοί .

α) Να εξετάσετε πότε ισχύει $z^2 + w^2 = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι: $z^{2010} + w^{2010} = 0$

ΙΣΟΤΗΤΑ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ $-z \in \mathcal{R}, z \in I$

- 20) ✎ Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ , ώστε ο $z = (\lambda + 3i) \cdot (2 - i)$ να είναι:
- πραγματικός αριθμός
 - φανταστικός αριθμός.
- 21) ✎ Να βρεθεί ο $x \in \mathcal{R}$ αν ο αριθμός $z = (x^2 - 5x + 4) + (x^2 + x - 2)i$ είναι διάφορος του μηδενός και επιπλέον είναι :
- πραγματικός αριθμός
 - φανταστικός αριθμός
- 22) ✎ Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = x^2 - x - 9i$ και $w = 2 - y^2i$, $x, y \in \mathcal{R}$.
- Να βρείτε τους x, y ώστε $z = w$.
 - Να βρείτε τον z .
- 23) ✎ Δίνεται ο μιγαδικός $z = 6i - (3 - 4i)x - 3yi - (3i - 2)x + (4 - 2yi)$ $x, y \in \mathcal{R}$.
- Να γράψετε τον z στη μορφή $\alpha + \beta i$.
 - Να λύσετε τις εξισώσεις : i) $\text{Re}(z) = 0$, ii) $\text{Im}(z) = 0$ iii) $\text{Re}(z) = \text{Im}(z)$ iv) $z = 0$
- 24) ✎ Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = (2 + i)x + (y - 1)i - 5$, $x, y \in \mathcal{R}$.
- Να γράψετε τον z στη μορφή $\alpha + \beta i$.
 - Να γράψετε τον z συναρτήσει του x , αν $\text{Im}(z) = 0$.
 - Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x και y αν $\text{Re}(z) = \text{Im}(z)$.
- 25) ✎ Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x όταν:
- $$x^2 + 5 + (x^2 - 5x + 1)i = 6 + 7i$$
- 26) ✎ Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε να ισχύουν οι ισότητες:
- $x - 2 + 2yi = -2i + 2 - yi$
 - $y + 2i = 3 - (2 + i)x$
 - $4y - 3yi - 2x = 2 - 5xi + 9i$
 - $(x^2 + 1)i + 2x = x^2 - 2xi - 3$
 - $2x - 3 + 4yi = 3 + (2y - 8)i$
 - στ) $4x + 3y + 2 + (5x + y + 2)i = x + y - 1 + (3x + 2y + 7)i$

- 27) ✎ Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

α) $(x+y) + (x-y)i = 3-i$

β) $\sqrt{3x^2 + x - 6} + (x^2 - 3)i = 2 + i$

γ) $9 - 27i = (3x + 2y) - yi$

δ) $(3-2i)^2 - (x+yi) = x-yi$

ε) $(3-2i) + (2x-yi) = 2(2x-yi) + 2i - 1$

στ) $(1-2i) + (x-yi) = (1-i)^2 - xi$

ζ) $\left(\frac{2+3i}{3-2i}\right)^2 - \frac{1}{x-yi} = 2-3i$

- 28) ✎ Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί x, y ώστε να ισχύει

$$\frac{x}{1+2i} + \frac{y}{3+2i} = \frac{5+6i}{8i-1}.$$

- 29) ✎ Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε $(\alpha + \beta i)^2 = \frac{12+5i}{i}$.

- 30) ✎ Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε $(\alpha + \beta i)^2 = \frac{1+7i}{1-i}$.

- 31) ✎ Αν $x + yi = (3-2i)^{13}$, $x, y \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι:

α) $x - yi = (3+2i)^{13}$ β) $x^2 + y^2 = 13^{13}$.

- 32) ✎ Αν $x + yi = (1-2i)^{2v}$, $x, y \in \mathbb{R}$ και $v \in \mathbb{N}^*$, να δείξετε ότι

$$x^2 + y^2 = 25^v.$$

- 33) ✎ Να βρεθούν τα $x, y \in \mathbb{R}$, ώστε οι μιγαδικοί $z_1 = x + 2y - i$ και $z_2 = 11 - (4x - y)i$ να είναι συζυγείς.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΜΕ
ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ (Με αντικατάσταση)

- 34) ✎ Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς που επαληθεύουν την ισότητα $z - (1 - i)(1 + i) = i(z - 2)$.
- 35) ✎ Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς που επαληθεύουν την ισότητα $z + \frac{z}{(1 - i)} = (1 + i)^3$.
- 36) ✎ Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς που επαληθεύουν την ισότητα $z(1 - i) - 1 = i\bar{z}$.
- 37) ✎ Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς που επαληθεύουν την ισότητα $\frac{z - 1}{2\bar{z} - i} = i - 1$.
- 38) ✎ Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς που επαληθεύουν την ισότητα $z\bar{z} + 2i(z + \bar{z}) = 20 + 8i$.
- 39) ✎ Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς που επαληθεύουν την ισότητα $z\bar{z} + (z - \bar{z}) = 3 + 2i$.
- 40) ✎ Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς που επαληθεύουν την ισότητα $z^2 - \bar{z} + 2 = 0$.
- 41) ✎ Να βρείτε τους μιγαδικούς $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει: $z^2 + 2\bar{z} + 1 = 0$.
- 42) ✎ Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς που επαληθεύουν την ισότητα $z\bar{z} + 2iz - 2i = 0$.
- 43) ✎ Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς που επαληθεύουν την ισότητα $z^2 + 2\bar{z} + 9 = \bar{z} - z$.
- 44) ✎ Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς που επαληθεύουν την ισότητα $\bar{z} = z^2$.
- 45) ✎ Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς που επαληθεύουν την ισότητα $\bar{z} = z^3$.
- 46) ✎ Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς που επαληθεύουν την ισότητα $z^3 = 3\bar{z}$.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΜΕ
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ (Με παραγοντοποίηση -
διακρίνουσα – σχήμα Horner)

- 47) ✎ Να λυθεί στο σύνολον των μιγαδικών η εξίσωση : $z^2 - z + 2 = 0$.
- 48) ✎ Να λυθεί στο σύνολον των μιγαδικών η εξίσωση : $z^2 - 2z + 4 = 0$.
- 49) ✎ Να λυθεί στο σύνολον των μιγαδικών η εξίσωση : $2z^2 - 4z + 7 = 0$
- 50) ✎ Να λυθεί στο σύνολον των μιγαδικών η εξίσωση : $z^2 - 6z + 25 = 0$.
- 51) ✎ Να λυθεί στο σύνολον των μιγαδικών η εξίσωση : $z^2 + 1 = 0$.
- 52) ✎ Να λυθεί στο σύνολον των μιγαδικών η εξίσωση : $z^4 = 1$.
- 53) ✎ Να λυθεί στο σύνολον των μιγαδικών η εξίσωση : $z^2 + 4 = 0$.
- 54) ✎ Να λυθεί στο σύνολον των μιγαδικών η εξίσωση : $z^4 - 16 = 0$.
- 55) ✎ Να λυθεί στο σύνολον των μιγαδικών η εξίσωση : $z^3 + 1 = 0$.
- 56) ✎ Να λυθεί στο σύνολον των μιγαδικών η εξίσωση : $z^3 - 1 = 0$.
- 57) ✎ Να λυθεί στο σύνολον των μιγαδικών η εξίσωση : $z^3 + z^2 - 2 = 0$.
- 58) ✎ Να λυθεί στο C η εξίσωση : $z^3 + 3z^2 + 3z + 2 = 0$.
- 59) ✎ Να λυθεί στο C η εξίσωση : $z^3 - 3z^2 + z + 2 = 0$.
- 60) ✎ Να λυθεί στο C η εξίσωση : $z^3 - 10z - 12 = 0$.
- 61) ✎ Να λυθεί στο C η εξίσωση : $z^3 + 2z^2 + 7z + 6 = 0$.
- 62) ✎ Να λυθεί στο C η εξίσωση : $z^3 - 3z^2 + 2 = 0$.
- 63) ✎ Η εξίσωση $z^2 + \alpha z + \beta = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έχει ρίζα τον μιγαδικό $2-i$.
 α) Να βρείτε την άλλη ρίζα της εξίσωσης
 β) Να βρείτε τα α και β .
- 64) ✎ Η εξίσωση $2z^2 + \kappa z + \lambda = 0$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, έχει ρίζα τον μιγαδικό αριθμό $3+2i$.
 α) Να βρείτε την άλλη ρίζα της εξίσωσης
 β) Να βρείτε τα κ και λ .
- 65) ✎ Η εξίσωση $3z^2 + \kappa z + \lambda = 0$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, έχει ρίζα τον μιγαδικό $2-3i$.
 α) Να βρείτε την άλλη ρίζα της εξίσωσης
 β) Να βρείτε τα κ και λ .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ ΝΑ ΑΠΟΔΕΙΞΕΤΕ ΟΤΙ: (Ν.α.ο
πραγματικός ή ν.α.ο. φανταστικός ή με συζυγείς)

- 66) ✎ Να δείξετε ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι ίσος με το συζυγή του και αντιστρόφως δηλαδή : $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.
- 67) ✎ Να δείξετε ότι κάθε φανταστικός αριθμός είναι αντίθετος από το συζυγή του και αντιστρόφως δηλαδή : $z = -\bar{z} \Leftrightarrow z \in I$.
- 68) ✎ Αν z φανταστικός αριθμός με $z \neq -i$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w = \frac{z^3 - i}{z + i}$ είναι πραγματικός αριθμός.
- 69) ✎ Να δείξετε ότι αν $w = \frac{z}{z + i}$ και ο w είναι πραγματικός τότε ο z είναι φανταστικός αριθμός.
- 70) α) Το άθροισμα δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών είναι πραγματικός αριθμός.
β) Ο αριθμός $u = (3 - 2i)^{2012} + (3 + 2i)^{2012}$ είναι πραγματικός.
- 71) ✎ Να αποδείξετε ότι:
α) Η διαφορά δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών είναι φανταστικός αριθμός.
β) Ο αριθμός $u = (4 - \sqrt{3}i)^v - (4 + \sqrt{3}i)^v$, $v \in \mathbb{N}^*$ είναι φανταστικός.
- 72) ✎ Να αποδείξετε ότι:
α) Το άθροισμα δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών είναι πραγματικός αριθμός.
β) Ο αριθμός $u = (z - \bar{w})^{15} + (\bar{z} - w)^{15}$ είναι πραγματικός.
- 73) ✎ Να αποδείξετε ότι:
α) Η διαφορά δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών είναι φανταστικός αριθμός.
β) Ο αριθμός $u = (z - \bar{w})^{15} - (\bar{z} - w)^{15}$ είναι φανταστικός.
- 74) ✎ Να αποδείξετε ότι:
α) Το άθροισμα δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών είναι πραγματικός αριθμός.
β) Ο αριθμός $u = (z^{50} - i)^5 + (i + (\bar{z})^{50})^5$ είναι πραγματικός.
- 75) ✎ Να αποδείξετε ότι:
α) Η διαφορά δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών είναι φανταστικός

αριθμός.

β) Ο αριθμός $u = (z^{50} - i)^5 - (i + (\bar{z})^{50})^5$ είναι φανταστικός.

76) ✎ Αν z, w είναι μιγαδικοί αριθμοί να αποδείξετε ότι οι μιγαδικοί $u = (z\bar{w} + \bar{z}w)^2$ και $v = (z\bar{w} - \bar{z}w)^2$ είναι πραγματικοί και ειδικότερα $u \geq 0$ και $v \leq 0$.

77) ✎ Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$ είναι πραγματικός.

78) ✎ Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z}$ είναι φανταστικός.

79) ✎ Αν z, w είναι μιγαδικοί αριθμοί με $z \neq 1$, και ισχύει $w = \bar{w}$ και $z\bar{z} = 1$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $u = \frac{w - z\bar{w}}{1 - z}$ είναι πραγματικός.

80) Έστω οι μιγαδικοί z και w για τους οποίους γνωρίζουμε ότι $z\bar{z} = 1$ και $w\bar{w} = 1$ ενώ $zw \neq -1$. Να αποδείξετε ότι :

α) ο αριθμός $u = \frac{z + w}{1 + zw}$ είναι πραγματικός.

β) ο αριθμός $u = \frac{z - w}{1 + zw}$ είναι φανταστικός.

81) ✎ Να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $u = \begin{vmatrix} z & \bar{z} \\ w & \bar{w} \end{vmatrix}$ είναι φανταστικός αριθμός για κάθε z, w μιγαδικούς αριθμούς.

82) ✎ Να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $u = \begin{vmatrix} z & \bar{z} \\ -w & \bar{w} \end{vmatrix}$ είναι πραγματικός αριθμός για κάθε z, w μιγαδικούς αριθμούς.

83) ✎ Αν $z = \frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i}$, με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $\vec{u} = (\alpha, \beta)$, $\vec{v} = (\gamma, \delta)$, να δείξετε ότι: $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$

84) ✎ Αν $z \in \mathbb{C}^*$ και $w = z - \frac{1}{z}$, να δείξετε ότι : $w \in \mathbb{H} \Leftrightarrow z \in I \quad - = \frac{1}{z}$.

85) ✎ Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ και $z_1 \cdot \bar{z}_2 \in \mathbb{R}$, και $w = \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ να δείξετε ότι : $w \in \mathbb{R}$.

86) ✎ Αν $z \in \mathbb{C}$ και $w = \frac{z^3 - \bar{z}^3}{1 + z\bar{z}}$, να δείξετε ότι : $w \in I$.

87) ✎ Αν $z \in \mathbb{C}$ και $w = \frac{\bar{z} - iz}{z - i\bar{z}}$, να δείξετε ότι : $w \in \mathbb{R}$.

88) ✎ Αν $z \in \mathbb{C}^*$ και $w = \frac{\bar{z} - iz}{z + i\bar{z}}$ να δείξετε ότι : $w \in I$.

- 89) ✎ Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \bar{z}_1 = z_2 \bar{z}_2 = 4$, και $w = \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ να δείξετε ότι : $w \in I$.
- 90) ✎ Έστω $z \in \mathbb{C}$ και $f(z) = \bar{z}^2 + \frac{z}{i}$, να δείξετε ότι :
- $$\operatorname{Im}(f(z)) = -\operatorname{Re}(z) \cdot [2\operatorname{Im}(z) + 1].$$
- 91) ✎ Αν $x, y \in \mathbb{R}$ & $v \in \mathbb{N}^*$ να αποδείξετε ότι ο αριθμός
- $$u = (x + yi)^{4v} + (y + xi)^{4v}$$
- είναι πραγματικός.
- 92) ✎ Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $z_1^{2013} = 1 + 2i$ και $z_2^{2013} = 2 + i$. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w = \frac{z_1}{z_2}$ δεν είναι πραγματικός.
- 93) ✎ Να αποδείξετε ότι $\overline{\left(\frac{1+z}{z}\right)} - \overline{\left(z + \frac{1}{z}\right)} = 1 - \bar{z}$.
- 94) ✎ Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 και z_3 ισχύουν $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ και $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ να αποδείξετε ότι: $z_1^3 = z_2^3 = z_3^3$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ: (Χωρίς μέτρο)

- 95) ✎ Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:
 α) $z - \bar{z} = 6i$ β) $z + \bar{z} = 4$ γ) $z^2 = \bar{z}^2$
 δ) $\bar{z}^2 = -z^2$ ε) $z^3 = \bar{z}^3$ στ) $\bar{z}^3 = -z^3$
- 96) ✎ Αν η εικόνα του μιγαδικού $z = \lambda + (\lambda - 1)i$ στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται στην ευθεία $y=4x+1$, να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$.
- 97) ✎ Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = (\lambda - 2) + 2\lambda i$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.
 Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z .
- 98) Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)i$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z , για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.
- 99) ✎ Έστω ένας μιγαδικός $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ για τον οποίο ισχύει η σχέση $z\bar{z} + 3z - 5\bar{z} = 8i \operatorname{Im}(z)$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $M(x, y)$ βρίσκονται σε κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.
- 100) ✎ Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει: $(z + \bar{z})^2 + (z - \bar{z})^2 = 15 + z\bar{z}$.
- 101) ✎ Δίνεται η συνάρτηση f με $f(z) = z^2 + z$, $z \in \mathbb{C}$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει: α) $f(z) = f(\bar{z})$ β) $\operatorname{Re}(f(z)) = 1 + \operatorname{Re}(z)$.
- 102) ✎ Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.
 α) Να γράψετε στη μορφή $a + bi$ τον μιγαδικό $w = \frac{z + 8i}{z + 6}$.
 β) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x και y αν $\operatorname{Im}(w) = 0$
 γ) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x και y αν $\operatorname{Re}(w) = 0$
 δ) Να δείξετε ότι η προηγούμενη σχέση (γ) είναι εξίσωση κύκλου και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.
 ε) Να δείξετε ότι ο προηγούμενος κύκλος διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- 103) ✎ Έστω ο μιγαδικός $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ και ο αριθμός $w = \frac{z + 2}{z - i}$ με $z \neq i$. Να αποδείξετε ότι:
 α) Αν ο w είναι πραγματικός, τα σημεία $M(x, y)$ βρίσκονται σε ευθεία γραμμή.
 β) Αν ο w είναι φανταστικός, τα σημεία $M(x, y)$ βρίσκονται σε κύκλο.

- 104) ✎ Έστω ο μιγαδικός $z=x+yi$, $x,y \in \mathbb{R}$ και ο αριθμός $w = \frac{z+1}{2z-i}$ με $z \neq i/2$. Να αποδείξετε ότι αν ο w είναι πραγματικός αριθμός, τα σημεία $M(x,y)$ βρίσκονται σε ευθεία γραμμή.
- 105) ✎ Έστω ο μιγαδικός $z=x+yi$, $x,y \in \mathbb{R}$ και ο αριθμός $w = \frac{2z-1}{iz+1}$ με $z \neq i$.
Αν ο w είναι πραγματικός αριθμός, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z .
- 106) ✎ Έστω ο μιγαδικός $z=x+yi$, $x,y \in \mathbb{R}$ και ο αριθμός $w = \frac{z+2\bar{z}}{z^2}$ με $z \neq 0$. Αν ο w είναι φανταστικός αριθμός, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z .
- 107) ✎ Έστω ο μιγαδικός $z=x+yi$, $x,y \in \mathbb{R}$ και ο αριθμός $w = \frac{i\bar{z}+1}{z-i}$ με $z \neq i$.
Να αποδείξετε ότι αν ο w είναι πραγματικός αριθμός, τα σημεία $M(x,y)$ βρίσκονται σε ευθείες γραμμές.
- 108) ✎ Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει :
α) $\operatorname{Re}(z + \frac{1}{z}) = 5\operatorname{Re}(z)$ β) $\operatorname{Im}(z + \frac{1}{z}) = -3\operatorname{Im}(z)$
- 109) ✎ Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει :
α) $\operatorname{Re}(z - \frac{1}{z}) = -3\operatorname{Re}(z)$ β) $\operatorname{Im}(z - \frac{1}{z}) = 2\operatorname{Re}(i \cdot \bar{z})$
- 110) ✎ Έστω ο μιγαδικός $z=x+yi$, $x,y \in \mathbb{R}$ και $y \neq 0$ για τον οποίο ισχύει $\operatorname{Re}(z\bar{z}) = \operatorname{Im}(z)$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $M(x,y)$ βρίσκονται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
- 111) ✎ Έστω ο μιγαδικός $z=x+yi$, $x,y \in \mathbb{R}$ και $z \neq 0$ για τον οποίο ισχύει $\operatorname{Re}(z + \frac{i}{z}) = \operatorname{Re}(z+1)$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $M(x,y)$ βρίσκονται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
- 112) ✎ Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x, y)$ του επιπέδου για τα οποία ο μιγαδικός αριθμός $u = 3z - (\bar{z})^2$ είναι αρνητικός πραγματικός, όπου z ο μιγαδικός αριθμός $z=x+yi$.
- 113) ✎ Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία έχουμε $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$ όπου $z=x+yi$.

- 114) ✎ Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία έχουμε $z + \frac{1}{z} \in I$ όπου $z = x + yi$.
- 115) ✎ Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία έχουμε $\frac{z-i}{z-1} \in \mathcal{R}$ όπου $z = x + yi$.
- 116) ✎ Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία έχουμε $\frac{z-i}{z-1} \in I$ όπου $z = x + yi$.
- 117) ✎ Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z όταν ξέρουμε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών i, z, iz είναι συνευθειακά σημεία.
- 118) ✎ Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z όταν ξέρουμε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $1, z+i, iz+1$ είναι συνευθειακά σημεία.
- 119) ✎ Αν η εικόνα του μιγαδικού z βρίσκεται στην ευθεία $\varepsilon: y=2x-1$, να βρείτε που βρίσκεται η εικόνα του μιγαδικού $w = iz - (1-i)\bar{z} - i^{2013}$.

Β. ΟΜΑΔΑ : ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΝΑ ΒΡΕΘΕΙ ΤΟ ΜΕΤΡΟ

120) ✎ Να βρείτε το μέτρο των παρακάτω μιγαδικών αριθμών:

α) $z_1 = 1 + i$ β) $z_2 = 1 - i$ γ) $z_3 = 3 - 4i$ δ) $z_4 = 6 + 8i$

121) ✎ Να βρείτε το μέτρο των παρακάτω μιγαδικών αριθμών:

α) $z_1 = 5$ β) $z_2 = -4$ γ) $z_3 = -4i$ δ) $z_4 = 8i$

122) ✎ Να βρείτε το μέτρο των παρακάτω μιγαδικών αριθμών:

α) $z_1 = \frac{1+i}{1-i}$ β) $z_2 = (1-i)^2 (1+i)^4$

γ) $z_3 = (2-i)(1+2i)$ δ) $z_4 = \frac{3+i}{4-3i}$

123) ✎ Να βρείτε το μέτρο των παρακάτω μιγαδικών αριθμών:

α) $z_1 = \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^4$ β) $z_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)^{2013}$

γ) $z_3 = \left(\frac{3+i}{1-3i} \right)^{2012}$ δ) $z_4 = \frac{(1-2i)^7}{(2+i)^3 (3-4i)}$

ε) $z_5 = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^v (-5+12i)(8-6i)^6$ στ) $z_6 = \left(\frac{\lambda + \mu i}{\lambda - \mu i} \right)^2, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

124) ✎ Αν $z = 3 - 4i$ και $w = -1 - i\sqrt{3}$ να βρείτε το μέτρο των παρακάτω

μιγαδικών: α) z^3 β) w^{-3} γ) $\frac{z^2}{w^3}$ δ) $i(\bar{w})^5$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ ΜΕ ΜΕΤΡΟ

- 125) ✎ Να λυθεί στο σύνολο $\mathbb{C}$ η εξίσωση: $|z^2| = -z^2$.
- 126) ✎ Να λυθεί στο σύνολο $\mathbb{C}$ η εξίσωση: $|z + i| = iz$.
- 127) ✎ Να λυθεί στο σύνολο $\mathbb{C}$ η εξίσωση: $|z - i| = 2\bar{z}$.
- 128) ✎ Να λυθεί στο σύνολο $\mathbb{C}$ η εξίσωση: $z^2 + |z| = 0$.
- 129) ✎ Να λυθεί στο σύνολο $\mathbb{C}$ η εξίσωση: $z^2 - 4|z| + 3 = 0$.
- 130) ✎ Να λυθεί στο σύνολο $\mathbb{C}$ η εξίσωση: $z + |z + 1| + i = 0$.
- 131) ✎ Να λυθεί στο σύνολο $\mathbb{C}$ η εξίσωση: $|\bar{z}| + z = 2 + i$.
- 132) ✎ Να βρείτε το μιγαδικό z για τον οποίο ισχύει: $|z| = \left| \frac{1}{z} \right| = |1 - z|$.
- 133) ✎ Να βρείτε το μιγαδικό z για τον οποίο ισχύει: $|z| = |z^2| = |1 - z|$.
- 134) ✎ Να βρείτε το μιγαδικό z για τον οποίο ισχύει: $|z| = \left| \frac{1 + i\sqrt{3}}{iz} \right| = |2 - z|$.
- 135) ✎ Να βρείτε το μιγαδικό z για τον οποίο ισχύει: $z = |z| - 1 + i(|z| - 8)$.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ (να βρεθεί και γραφική παράσταση)

- 136) ✎ Να βρεθεί και παρασταθεί γραφικά ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει: $|z^2| = z^2$.
- 137) ✎ Να βρεθεί και παρασταθεί γραφικά ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει: $|z - 1| = z$.
- 138) ✎ Να βρεθεί και παρασταθεί γραφικά ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει: $|z + i| = 2\bar{z}$.
- 139) ✎ Να βρεθεί και παρασταθεί γραφικά ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει: $|z - i| = 1$.
- 140) ✎ Να βρεθεί και παρασταθεί γραφικά ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει: $|z + 1 + 2i| = 3$.
- 141) ✎ Να βρεθεί και παρασταθεί γραφικά ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει: $|z| \geq 2$.
- 142) ✎ Να βρεθεί και παρασταθεί γραφικά ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει: $2 < |z| < 4$.
- 143) ✎ Να βρεθεί και παρασταθεί γραφικά ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει: $|z + 1| = |z - 2i|$.
- 144) ✎ Να βρεθεί και παρασταθεί γραφικά ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει: $|z - i| > |z + 1|$.
- 145) ✎ Να βρεθεί και παρασταθεί γραφικά ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει: $|2z + 1| < |z + i|$.
- 146) ✎ Να βρεθεί και παρασταθεί γραφικά ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει: $|z - 1| = 1 + \operatorname{Re}(z)$.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ (Ευθεία – Κύκλος)

- 147) ✎ Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2 για τους οποίους ισχύει $z_1 z_2 = 2z_2 + 1$. Ναδειχθεί ότι, όταν η εικόνα του z_1 κινείται σε κύκλο με κέντρο $K(1,0)$ και ακτίνας $\rho=1$, τότε η εικόνα του z_2 κινείται πάνω σε μια ευθεία.
- 148) ✎ Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z = \lambda + 2 + (3\lambda - 3)i$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z .
- β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού w για τον οποίο ισχύει : $w = z + (1+i)$.
- γ) Να βρείτε το μιγαδικό z που έχει την πλησιέστερη εικόνα στην αρχή των αξόνων.
- 149) ✎ Έστω ο μιγαδικός $z = \alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\alpha + \beta = 4$. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $w = (1+i)z - 3i$, βρίσκονται σε μια ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.
- 150) ✎ Έστω ο μιγαδικός $z = \alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, με $\alpha, \beta \neq 0$ για τον οποίο ισχύει $|z - 1| = 1$. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $w = \frac{1}{z}$ κινούνται σε μια ευθεία και να βρεθεί η εξίσωσή της.
- 151) ✎ Έστω M και N οι εικόνες των μιγαδικών z και w , για τους οποίους ισχύει $w = iz - \frac{i}{z}$ και για το M ισχύει $|z| = 1$ (δηλαδή κινείται σε μοναδιαίο κύκλο), να δείξετε ότι το σημείο N κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα.
- 152) ✎ Έστω M και N οι εικόνες των μιγαδικών z και w , για τους οποίους ισχύει $w = z + \frac{1}{z}$ και για το M ισχύει $|z| = 1$ (δηλαδή κινείται σε μοναδιαίο κύκλο), να δείξετε ότι το σημείο N κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα.
- 153) ✎ Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = -2 + 3i$ και $z_2 = 2 - 3i$, και $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $|z + z_1| = |z + z_2|$, και να βρεθεί ποιος απ' αυτούς έχει το μικρότερο μέτρο.
- 154) ✎ Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $|z - 4i| = |z + 2|$. Ποιος απ' αυτούς τους μιγαδικούς έχει το μικρότερο μέτρο;

- 155) ✎ Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $|z+1|=|z+4i|$. Ποιος απ' αυτούς τους μιγαδικούς έχει το μικρότερο μέτρο;
- 156) ✎ Δίνεται η εξίσωση $|z-1|=|z-3i|$, με z μιγαδικό αριθμό.
- α) Ναδειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι η μεσοκάθετος (ε) του ευθυγράμμου τμήματος AB με άκρα $A(1,0)$ και $B(0,3)$.
 - β) Ναδειχθεί ότι η εξίσωση της (ε) είναι $x-3y+4=0$.
 - γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της (ε).
 - δ) Να βρεθεί η εικόνα του z για τον οποίο το $|z|$ είναι ελάχιστο.
- 157) ✎ Έστω ε η ευθεία που ορίζουν οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 στο μιγαδικό επίπεδο για τους οποίους ισχύει $z_1 + z_2 = 1 - 2i$ και $z_1 - z_2 = 3 - 4i$. Να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό w που η εικόνα του βρίσκεται στην ευθεία ε και έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο.
- 158) ✎ Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $(1-z)^v = z^v$, $v \in \mathbb{N}^*$ είναι η ευθεία $x = \frac{1}{2}$.
- 159) ✎ Έστω $z = (2x-3) + (2y-1)i$ με $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι στο μιγαδικό επίπεδο ο γεωμετρικός τόπος των σημείων (x, y) που είναι τέτοια ώστε $|2z-1+3i|=3$ είναι κύκλος, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.
- 160) ✎ Έστω $z = 2x + (2y-1)i$ με $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι στο μιγαδικό επίπεδο ο γεωμετρικός τόπος των σημείων (x, y) που είναι τέτοια ώστε $|z-1-i|=2\sqrt{5}$ είναι κύκλος, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.
- 161) ✎ Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z με την ιδιότητα $|z-4i|=2$.
- α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας M του z .
 - β) Ποιος απ' τους παραπάνω μιγαδικούς έχει το μεγαλύτερο και ποιος το μικρότερο μέτρο;
- 162) ✎ Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z με την ιδιότητα $|z-2-2i|=3\sqrt{2}$.
- α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας M του z .
 - β) Ποιος απ' τους παραπάνω μιγαδικούς έχει το μεγαλύτερο και ποιος το μικρότερο μέτρο;

- 163) ✎ Έστω M και N οι εικόνες των μιγαδικών z και w , για τους οποίους ισχύει $w = \bar{z} - \frac{2}{z}$ και για το M ισχύει $|z|=1$ (δηλαδή κινείται σε μοναδιαίο κύκλο), να βρείτε την εξίσωση στην οποία κινείται το σημείο N .
- 164) ✎ Έστω ο μιγαδικός $z=a+bi$, με $|z|=\sqrt{2}$ και ο μιγαδικός w ώστε $w=iz+1$. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών w βρίσκονται σε κύκλο και να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του.
- 165) ✎ Αν για τους μιγαδικούς z ισχύει $|z|=1$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w για τους οποίους ισχύει $w=2z+1$.
- 166) ✎ Αν για τους μιγαδικούς z ισχύει $|u|=4$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει $u=2iz+1+i$.
- 167) ✎ Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, w για τους οποίους ισχύει $zw=2z+w$. Αν η εικόνα του z διαγράφει κύκλο κέντρου $K(1,0)$ και ακτίνας $\rho=2$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w .
- 168) ✎ Έστω ο μιγαδικός $z=a+bi$, με $a, b \in \mathbb{R}$, με $|z-i+2|=1$ και ο μιγαδικός w για τον οποίο ισχύει $w=2z+i-2$. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του μιγαδικού w βρίσκονται σε κύκλο και να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του.
- 169) ✎ Να δείξετε ότι οι εικόνες του μιγαδικού αριθμού z στο επίπεδο, για τον οποίο ισχύει $(2z)^{2013} - (z+1)^{2013} = 0$, βρίσκονται σε κύκλο του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.
- 170) ✎ Αν $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού $z = \frac{1+xi}{x+i}$ ανήκει σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.
- 171) ✎ Να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού $z = \frac{2+ai}{a+2i}$ ανήκει σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.
- 172) ✎ Να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού $z = \frac{\lambda-2i}{\lambda+2i}, \lambda \in \mathbb{R}$ ανήκει σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

- 173) ✎ Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του μιγαδικού z που ικανοποιούν τη σχέση $\left(\frac{2z+1}{z+2}\right)^v = \frac{5+12i}{13}, v \in \mathbb{N}^*$ ανήκουν σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.
- 174) ✎ Αν η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$, να αποδείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για την εικόνα του μιγαδικού $w = \frac{2z+i}{2-iz}$.
- 175) ✎ Αν η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$, να αποδείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για την εικόνα του μιγαδικού $w = \frac{2z-i}{iz+2}$.
- 176) ✎ Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|2z-1|=|z-2|$ να δείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.
- 177) ✎ Έστω z, w μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει:
 $|(1-i)z-2|=2$ και $|w+2i|=|w-2+4i|$.
 α) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z .
 β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w .
 γ) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.
- 178) ✎ Έστω z, w μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $|z+2|=1$ και $|w-4i|=2$. Να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή του $|z-w|$.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ (Παραβολή – Έλλειψη – Υπερβολή)

- 179) ✎ Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $(z^2-1) \in \mathbb{R}$.
- 180) ✎ Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z=x+yi$ και οι μιγαδικοί $w = x - 1 - \frac{1}{\lambda}(y+2)i$, $u = -x - 1 + \lambda(y-2)i$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Αν ισχύει $w = i \cdot \bar{u}$ καθώς το λ μεταβάλλεται, να δείξετε ότι η εικόνα P του μιγαδικού αριθμού z κινείται σε υπερβολή.
- 181) ✎ Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w και w_1 τέτοιους ώστε $w = z - zi$ και $w_1 = \frac{1}{a} + ai$, $a \in \mathbb{R}$ με $a \neq 0$. Να αποδείξετε ότι αν το a μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$ με $a \neq 0$ και ισχύει $w = \bar{w}_1$ τότε η εικόνα P του z στο μιγαδικό επίπεδο κινείται σε μια υπερβολή.
- 182) ✎ Αν η εικόνα του μιγαδικού $z \in \mathbb{C}^*$ κινείται στην ευθεία $y=x$, να δείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού $w = z + \frac{1}{z}$ κινείται σε μια ισοσκελή υπερβολή.
- 183) ✎ Έστω ότι για το μιγαδικό z ισχύει $\|z - 4i\| - \|z + 4i\| = 6$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z καθώς και ποιος απ αυτούς έχει το μικρότερο μέτρο.
- 184) ✎ Έστω ότι για το μιγαδικό z ισχύει $\|z - 4\| - \|z + 4\| = 6$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z καθώς και ποιος απ αυτούς έχει το μικρότερο μέτρο.
- 185) ✎ Έστω ο μιγαδικός $z=a+\beta i$, με $a, \beta \in \mathbb{R}$, με $a, \beta \neq 0$ για τον οποίο ισχύει $|z|=1$. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $w = 8z + \frac{1}{3z}$ κινούνται σε μια έλλειψη.
- 186) ✎ Αν M_1 και M_2 είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 αντίστοιχα, και $z_2 = z_1 + \frac{4}{z_1}$, να αποδείξετε ότι : όταν το M_1 κινείται σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα 4, τότε το M_2 κινείται σε μία έλλειψη. $\mathbb{R}\mathbb{R}\mathbb{R}$
- 187) ✎ Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{z+\bar{z}}$ με z μιγαδικό και $\text{Re}(z) \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right) = f(z)$

β) Να βρείτε το είδος της καμπύλης στην οποία ανήκουν τα σημεία $M(x,y)$ για τα οποία οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha x + \beta y i$ με $\alpha, \beta, x, y \in \mathbb{R}$ και $\alpha\beta x \neq 0$ ικανοποιούν τη σχέση: $\operatorname{Re}[f(z)] = 0$.

188) ✎ Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z στο

μιγαδικό επίπεδο για τον οποίο ισχύει: $\frac{1}{|z-3i|} + \frac{1}{|z+3i|} = \frac{10}{|z^2+9|}$. Αν

z_1 και z_2 είναι μιγαδικοί που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο και είναι συμμετρικοί ως προς την αρχή των αξόνων να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z_1 - z_2|$

189) ✎ Έστω $z=2x+yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$ και $|z|=2$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ στο μιγαδικό επίπεδο. Αν τα M_1, M_2 είναι συμμετρικά σημεία του παραπάνω γεωμετρικού τόπου w_1, w_2 είναι οι αντίστοιχοι μιγαδικοί με εικόνες τα M_1, M_2 , να βρείτε την ελάχιστη και μέγιστη τιμή του $|w_1 - w_2|$.

190) ✎ Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού αριθμού z για τον οποίο ισχύει: $|z-3| + |z+3| = 10$, και να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή του $|z_1 - z_2|$ όπου z_1, z_2 οι μιγαδικοί των οποίων οι εικόνες είναι δυο συμμετρικά σημεία του παραπάνω γεωμετρικού τόπου.

191) ✎ Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού αριθμού z για τον οποίο ισχύει: $|z-4i| + |z+4i| = 10$, και να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή του $|z_1 - z_2|$ όπου z_1, z_2 οι μιγαδικοί των οποίων οι εικόνες είναι δυο συμμετρικά σημεία του παραπάνω γεωμετρικού τόπου.

192) ✎ Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει $z^2 + (\bar{z})^2 - 2z \cdot \bar{z} = 4(z + \bar{z})$, όπου $z=x+yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$ είναι παραβολή της οποίας να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ ΝΑ ΑΠΟΔΕΙΞΕΤΕ ΟΤΙ Ή ΑΝ ΚΑΙ ΜΟΝΟ
ΑΝ (ισότητες –ισοδυναμίες – ταυτότητες υπό συνθήκη)

- 193) ✎ Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z|=1$, να δείξετε ότι :
- $$|z+2|^2 + |z-2|^2 = 10.$$
- 194) ✎ Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z|=1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης : $A = |1+z|^2 + |1-z|^2$. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το συμπέρασμα.
- 195) ✎ Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ να αποδείξετε ότι : $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$.
- 196) ✎ Αν $z, w \in \mathbb{C}$ να δείξετε ότι:
- α) $|(\bar{z})^2 + i| = |z^2 - i|$ β) $|z^3 - (\bar{w})^5| = |w^5 - (\bar{z})^3|$
- 197) ✎ Αν z, w μιγαδικοί αριθμοί να αποδείξετε ότι:
- α) $|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w})$
β) $|z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{w})$
- 198) Αν z, w, v, u μιγαδικοί αριθμοί να αποδείξετε ότι :
- $$|\bar{z}u - \bar{w}v|^2 + |zv + wu|^2 = (|z|^2 + |w|^2)(|v|^2 + |u|^2)$$
- 199) ✎ Αν $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 1$, τότε : $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 1$.
- 200) ✎ Αν $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, να αποδείξετε ότι:
- $$|z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1| = |z_1 + z_2 + z_3|.$$
- 201) ✎ Αν z_1, z_2, z_3 με $|z_1|=1, |z_2|=\sqrt{2}$ και $|z_3|=\sqrt{3}$, να δείξετε ότι
- $$\sqrt{6}|z_1 + z_2 + z_3| = |z_2z_3 + 2z_3z_1 + 3z_1z_2|.$$
- 202) ✎ Αν z_1, z_2, z_3 με $|z_1|=1, |z_2|=5$ και $|z_3|=10$, να δείξετε ότι
- $$50|z_1 + z_2 + z_3| = |z_2z_3 + 25z_3z_1 + 100z_1z_2|.$$
- 203) ✎ α) Αν $|z|=1$, να δείξετε ότι $\bar{z} = \frac{1}{z}$.
β) Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1, z_2, \dots, z_k$ ισχύει $|z_1|=|z_2|=\dots=|z_k|=1$, να αποδείξετε ότι :
- $$|z_1 + z_2 + \dots + z_k| = \left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_k} \right|.$$

204) ✎ Αν $z_1, z_2, \dots, z_k \in \mathbb{C}^*$, να δείξετε ότι :

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_k| = \left| \frac{|z_1|^2}{z_1} + \frac{|z_2|^2}{z_2} + \dots + \frac{|z_k|^2}{z_k} \right|$$

205) ✎ Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 με $|z_1| = |z_2| = 2$ και $z_1 z_2 + 4 \neq 0$

.Να δειχθεί ότι ο μιγαδικός $w = \frac{z_1 + z_2}{4 + z_1 z_2}$ είναι πραγματικός.

206) ✎ Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $z_1 \neq z_2$ και $|z_1| = |z_2| = 3$. Να δειχθεί ότι ο αριθμός

$$w = \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$$
 είναι φανταστικός.

207) ✎ Έστω $z \in \mathbb{C}^*$. Να δείξετε ότι : α) $u = \frac{z}{|z|} + \frac{|z|}{z} \in \mathbb{R}$ β) $v = \frac{z}{|z|} - \frac{|z|}{z} \in i\mathbb{R}$.

208) ✎ Αν οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 ανήκουν στο μοναδιαίο κύκλο, να δείξετε ότι:

$$\alpha) \left| \frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 + z_2 + z_3} \right| = 1 \quad \beta) \frac{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3)(z_3 + z_1)}{z_1 z_2 z_3} \in \mathbb{R}$$

209) ✎ Αν ισχύει $|z + w| = |z - w|$, με $w \neq 0$, να δείξετε ότι ο αριθμός $\frac{z}{w} \in i\mathbb{R}$.

210) ✎ Αν ισχύει $\left| z + \frac{1}{z} \right| = |z|$, να αποδείξετε ότι $\operatorname{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}$.

211) ✎ Αν ισχύει $|z^4| = |z^4 - 1|$, να αποδείξετε ότι $\operatorname{Re}(z^4) = \frac{1}{2}$.

212) ✎ Να αποδείξετε ότι αν $|z - 8| = 2|z - 2|$, τότε $|z| = 4$.

213) ✎ Να αποδείξετε ότι αν $\left| \frac{z+7}{z-1} \right| = 3$, τότε $|z - 2| = 3$.

214) ✎ Να αποδείξετε ότι όλοι οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει :

$$5(z + i)^5 = (4 + 3i)(1 + iz)^5$$
 είναι πραγματικοί.

215) ✎ Αν ισχύει $|z| = 2$, $|w| = 3$ και $|z + w| = 4$, να βρείτε το $|z - w|$.

216) ✎ Αν ισχύει $|z + w| = |z| = |w|$, να αποδείξετε ότι : $|z - w| = \sqrt{3}|z|$.

217) ✎ Αν ισχύει $z^2 + z + 1 = 0$, να αποδείξετε ότι : $|z| = |z + 1| = 1$.

218) Δίνονται z_1, z_2 με $z_2 \neq 0$. Δείξτε ότι :

$$\alpha) \operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)}{|z_2|^2} \quad \beta) \operatorname{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_2)}{|z_2|^2}$$

219) Αν z, w, v , είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$|z - w|^2 + |z - v|^2 = 2 \left| z - \frac{v + w}{2} \right|^2 + \frac{1}{2} |v - w|^2.$$

220) Έστω ο μιγαδικός z , για τον οποίο ισχύει $z \neq -1$. Να αποδείξετε ότι :

αν $|z|=1$, τότε ο $w = \frac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός και αντίστροφα.

221) Έστω οι μιγαδικοί $z \neq 0$ και w ώστε $w = z + \frac{1}{z}$. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αν και μόνο αν ο z είναι πραγματικός ή $|z|=1$

222) Έστω οι μιγαδικοί $z \neq 0$ και w ώστε $w = z + \frac{4}{z}$. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αν και μόνο αν ο z είναι πραγματικός ή $|z|=2$

223) Έστω οι μιγαδικοί $z \neq 0$ και w ώστε $w = z - \frac{9}{z}$. Να αποδείξετε ότι ο w είναι φανταστικός αν και μόνο αν ο z είναι φανταστικός ή $|z|=3$.

224) Έστω ο μιγαδικός z , για τον οποίο ισχύει $z \neq i$. Να αποδείξετε ότι :

$$w = \frac{z + \alpha i}{iz + \alpha} \in \mathbb{I} \Leftrightarrow z \in \mathbb{I}$$

225) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 ισχύει $|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = 0$.

226) Αν για το μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ ισχύει $\bar{z} = z^3 \cdot |z|$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) |z|=1$$

$$\beta) z^4 = 1$$

γ) να βρείτε το μιγαδικό αριθμό z .

227) Αν για το μιγαδικό αριθμό $z \neq 1$ ισχύει $z^5 \cdot \bar{z}^2 = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) |z|=1$$

$$\beta) z^3 = 1$$

$$\gamma) z^2 + z + 1 = 0$$

$$\delta) z^{2012} + z^{2011} + 1 = 0$$

228) Αν $z \in \mathbb{C}^*$ και ισχύει $z^5 = \bar{z}^2$, να αποδείξετε ότι: $z^7 = \bar{z}^7$.

ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ (Να αποδείξετε ότι & τριγωνική ανισότητα.)

- 229) ✎ Αν $z_1 = 1 - i$ και $|z_2| = 2\sqrt{2}$ να βρεθεί η μεγαλύτερη και η μικρότερη τιμή της παράστασης $|z_1 - z_2|$.
- 230) ✎ Αν $z_1 = 6 - 8i$ και $|z_2| = 5$ να βρεθεί η μεγαλύτερη και η μικρότερη τιμή της παράστασης $|z_1 - z_2|$.
- 231) ✎ Έστω $w = -3 + 4i$ και $|z| = 2$. Να αποδείξετε ότι $3 \leq |z - w| \leq 7$.
- 232) ✎ Αν $|z - 1 + 2i| < 3$ να δείξετε ότι $2 < |z + 2 - 2i| < 8$
- 233) ✎ Αν $|z| \leq \frac{3}{2}$ να δείξετε ότι $|2(1 - i\sqrt{3})z^3 - iz| \leq 15$.
- 234) ✎ Αν $|z - 2 + 3i| < 4$ να δείξετε ότι $1 < |z + 1 - i| < 9$.
- 235) ✎ Αν $z \in \mathbb{C}$ τότε : $|z + 9| + |z + 7| - |z + 5| + |z + 3| - |z + 1| - |z| \leq 13$.
- 236) ✎ Να δείξετε ότι για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει: $\sqrt{2}|z| \geq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$.
- 237) ✎ Να δείξετε ότι για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει: $\sqrt{5}|z| \geq 2|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$
- 238) ✎ Να δείξετε ότι για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει:

$$\left| |\operatorname{Re}(z)| - |\operatorname{Im}(z)| \right| \leq |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \leq \sqrt{2}|z|$$
- 239) ✎ Να δείξετε ότι για κάθε μιγαδικό z ισχύει: $|z + |z|| + |z - |z|| \geq 2|z|$
- 240) ✎ Αν $z, w, v \in \mathbb{C}$ με $w = \frac{z - v}{\bar{v}z - 1}$, όπου $z \neq \frac{1}{\bar{v}}$ και $0 < |v| < 1$. Να δείξετε
 ότι : $|w| < 1 \Leftrightarrow |z| < 1$.
- 241) ✎ Αν $z, w \in \mathbb{C}$ με $|z| \leq 1$ και $|w| \leq 1$, να δείξετε ότι : $|z - w| \leq |1 - z\bar{w}|$.
- 242) ✎ Αν $z, w \in \mathbb{C}$ να δείξετε ότι :
 α) $z\bar{w} + \bar{z}w \leq |z|^2 + |w|^2$ β) $z\bar{w} + \bar{z}w \leq 2|zw|$.
- 243) ✎ Αν $z, w \in \mathbb{C}$ να δείξετε ότι : $|z - w|^2 \leq (1 + |z|^2)(1 + |w|^2)$.
- 244) ✎ Αν z, w μιγαδικοί αριθμοί με $|z| \leq 1$ και $|w| \leq 1$, να αποδείξετε ότι :
 $|z - w| \leq |1 - z\bar{w}|$.
- 245) ✎ Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda > 0$, και z, w μιγαδικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι :

$$|z + w|^2 \leq (1 + \lambda)|z|^2 + \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)|w|^2$$

Γ. ΟΜΑΔΑ: ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ & ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

- 246)  Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w και $u=z \cdot w$.
- α) Να αποδείξετε ότι : $z \in I \Leftrightarrow z = -\bar{z}$.
 - β) Αν για τους z, w ισχύει : $|z + \bar{w}| = |\bar{z} - w|$ να δείξετε ότι $u \in I$.
 - γ) Αν επιπλέον ισχύει $w=2+i$ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z .
- 247)  Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w με $w = \frac{z+3i}{z+3}$ και $z \neq -3$.
- α) Αν $z=x+yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ να γράψετε τον w στη μορφή $a+bi$.
 - β) Να δείξετε ότι αν ο w είναι πραγματικός τότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η ευθεία $y=-x-3$.
 - γ) Να δείξετε ότι αν $|w|=2$, τότε η εικόνες του z κινούνται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
- 248)  Αν z, w είναι μιγαδικοί για τους οποίους ισχύει: $z \neq 0, w \neq 0, z \neq w$ και $|z+w|=|z-w|$.
- α) Να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός $u = \frac{z}{w}$ είναι φανταστικός.
 - β) Να δείξετε ότι : $\left| \frac{i \cdot z}{z-w} \right| + \left| \frac{\bar{w}}{z+w} \right| \geq 1$.
 - γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z αν $w=1+i$.
- 249)  Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z για τους οποίους ισχύει η σχέση : $|z-1|=1+\operatorname{Re}(z)$ (1) και η συνάρτηση $f(z)=z^2-z$.
- α) Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι η παραβολή με εξίσωση : $y^2=4x$.
 - β) Να βρείτε τους μιγαδικούς z που ικανοποιούν τη σχέση (1) και επιπλέον ισχύει και $f(z)=-4+2i$.
 - γ) Να βρείτε τους μιγαδικούς z που ικανοποιούν τη σχέση (1) και επιπλέον ισχύει και $|f(z)|=3|z|$.
- 250)  Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=\frac{z+1}{z}$, με $z=x+yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$ και $z \neq 0$.
- α) Να γραφεί ο μιγαδικός z στη μορφή $a+bi$ (κανονική μορφή).
 - β) Να αποδείξετε ότι : $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.
 - γ) Αν ισχύει $f(z)f(\bar{z})=2$, να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο $K(1,0)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{2}$.
 - δ) Για τους μιγαδικούς του ερωτήματος γ) να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του μέτρου $|f(z)-1|$.

251) ✎ Έστω $z=x+yi$, με $x,y \in \mathbb{R}$ και $z \neq 0$.

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού

$$z \text{ αν } \left| \frac{(z + \bar{z})^2}{2z} \right| = |z|.$$

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού

$$z \text{ αν ο } w = \frac{(z + \bar{z})^2}{2z} + i \cdot \bar{z} \text{ είναι πραγματικός αριθμός.}$$

252) ✎ Αν $w \in \mathbb{C}$ και $\theta \in (0, \pi)$, θεωρούμε την εξίσωση

$$w^2 - 2\sigma\upsilon\nu\theta \cdot w + 1 = 0 \quad (1).$$

α) Να λυθεί η εξίσωση (1).

β) Αν w_1, w_2 οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1) τότε:

i) να βρεθούν τα $|w_1|$ και $|w_2|$

ii) να βρεθεί γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w_1, w_2

iii) να βρεθεί το $\max |w_1 - w_2|$.

253) ✎ Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w με $w = \frac{z+i}{1+iz}$ και $z \neq i$.

α) Να δείξετε ότι : $w \neq i$.

β) Να δείξετε ότι: $\left| \frac{w-i}{w+i} \right| = |z|$.

γ) Αν $|z|=1$ να δείξετε ότι : $w \in \mathbb{R}$

δ) Να δείξετε ότι : $w \in I \Leftrightarrow z \in I$

254) ✎ Αν $z \in \mathbb{C}$ και ισχύει $(z+i)^{17} + (2i)^{11}(\bar{z}-i)^6 = 0$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $|z+i| = 2$

β) ο $w = \frac{(z+i)^2 + 4}{z+i} \in \mathbb{R}$

γ) ο $u = (z+i)^{23} \in I$

Δ. ΟΜΑΔΑ: ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

255) ⇨ Απολυτήριες εξετάσεις

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις: $|z - 1|^2 + |z + 1|^2 = 4$ (1) και $|w - 5\bar{w}| = 12$ (2)

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$

B2. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$ τότε, να βρείτε το $|z_1 + z_2|$.

B3. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|w|$.

B4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι: $1 \leq |z - w| \leq 4$.

256) ⇨ Απολυτήριες εξετάσεις

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με $z \neq 3i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις: $|z - 3i| + |\bar{z} + 3i| = 2$ και $w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i}$.

B1. Να τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z .

B2. Να αποδείξετε ότι $\bar{z} + 3i = \frac{1}{z - 3i}$

B3. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2 \leq w \leq 2$. **B4.** Να αποδείξετε ότι: $|z - w| = |z|$.

257) ⇨ Απολυτήριες εξετάσεις

Δίνεται η εξίσωση $z + \frac{2}{z} = 2$ όπου $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$

Δίνεται η εξίσωση $z + \frac{2}{z} = 2$ όπου $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$

B1. Να βρείτε τις ρίζες z_1 και z_2 της εξίσωσης.

B2. Να αποδείξετε ότι $z_1^{2010} + z_2^{2010} = 0$

B3. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει $|w - 4 + 3i| = |z_1 - z_2|$ τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο.

B4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος **B3**, να αποδείξετε ότι $3 \leq |w| \leq 7$

258) $\Rightarrow$ Απολυτήριες εξετάσεις

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)i$, $\lambda \in \mathbb{R}$

A. α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z , για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

β. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_0 = 1 - i$ έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο.

B. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί w οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση $|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_0$, όπου z_0 ο μιγαδικός αριθμός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα.

259) $\Rightarrow$ Απολυτήριες εξετάσεις

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν: $|(i + 2\sqrt{2})z| = 6$

και $|w - (1 - i)| = |w - (3 - 3i)|$, τότε να βρείτε:

α) το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z .

β) το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w .

γ) την ελάχιστη τιμή του $|w|$.

δ) την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$.

260) $\Rightarrow$ Απολυτήριες εξετάσεις

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{2 + ai}{a + 2i}$ με $a \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

β) Έστω z_1, z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο $z = \frac{2 + ai}{a + 2i}$

για $a = 0$ και $a = 2$ αντίστοιχα.

i) Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 .

ii) Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $(z_1)^{2\nu} = (-z_2)^\nu$ για κάθε φυσικό αριθμό ν .

261) $\Rightarrow$ Απολυτήριες εξετάσεις

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και

$z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι: i) $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$

ii) $|z_1 - z_2|^2 \leq 4$ και $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \geq -1$

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

262) ⇨ Απολυτήριες εξετάσεις

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$

α) Δείξτε ότι: $\bar{z}_1 = \frac{9}{z_1}$

β) Δείξτε ότι ο αριθμός $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός.

γ) Δείξτε ότι: $|z_1 + z_2 + z_3| = \frac{1}{3}|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$

263) ⇨ Απολυτήριες εξετάσεις

Αν ισχύει $\left|z + \frac{1}{z}\right| = |z|$, να αποδείξετε ότι $\operatorname{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}$.

264) ⇨ Απολυτήριες εξετάσεις

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, και $w = 3z - i\bar{z} + 4$, όπου $\bar{z}$ είναι ο συζυγής του z .

α) Να αποδείξετε ότι $\operatorname{Re}(w) = 3\alpha - \beta + 4$ και $\operatorname{Im}(w) = 3\beta - \alpha$.

β) Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 12$, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$.

γ) Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z , οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$, έχει το ελάχιστο μέτρο.

265) ⇨ Απολυτήριες εξετάσεις

Να βρεθούν τα σημεία του επιπέδου, που είναι εικόνες των μιγαδικών

z , για τους οποίους ισχύει: $\left|\frac{z-1}{z-i}\right| = 1$.

266) ⇨ **Επαναληπτική**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z , με $z \neq -1$, για τους οποίους ο αριθμός $w = \frac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός. Να αποδείξετε ότι:

B1. $|z| = 1$

B2. Ο αριθμός $\left(z - \frac{1}{z}\right)^4$ είναι πραγματικός.

B3. $\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)(z_1 + z_2) \leq 4$, όπου z_1, z_2 δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z .

B4. Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών u , για τους οποίους ισχύει $u - ui = \frac{i}{w} - w$, $w \neq 0$, ανήκουν στην υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$.

267) ⇨ **Επαναληπτική**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w οι οποίοι ικανοποιούν αντίστοιχα τις σχέσεις: $|z - i| = 1 + \operatorname{Im}(z)$ (1), και $w(\bar{w} + 3i) = i(3\bar{w} + i)$ (2).

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η παραβολή με εξίσωση $y = \frac{1}{4}x^2$.

B2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho = 2\sqrt{2}$.

B3. Να βρείτε τα σημεία A και B του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, w με $z = w$.

B4. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο KAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές και, στη συνέχεια, να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό u με εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο το σημείο Λ έτσι ώστε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία K, A, Λ, B να είναι τετράγωνο.

268) ⇨ **Επαναληπτική**

Έστω ότι οι μιγαδικοί αριθμοί z_1 και z_2 είναι οι ρίζες εξίσωσης δευτέρου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές για τις οποίες ισχύουν $z_1 + z_2 = -2$ και $z_1 \cdot z_2 = 5$

B1. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 .

B2. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει η σχέση $|w - z_1|^2 + |w - z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$, να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με εξίσωση $(x+1)^2 + y^2 = 4$.

B3. Από τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος **B2** να βρείτε εκείνους για τους οποίους ισχύει $2 \cdot \operatorname{Re}(w) + \operatorname{Im}(w) = 0$.

B4. Αν w_1, w_2 είναι δύο από τους μιγαδικούς w του ερωτήματος **B2** με την ιδιότητα $|w_1 - w_2| = 4$, να αποδείξετε ότι $|w_1 + w_2| = 2$.

269) $\Rightarrow$ Επαναληπτική

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$(2-i)z + (2+i)\bar{z} - 8 = 0$$

α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z = x+yi$ οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

β. Να βρείτε τον μοναδικό πραγματικό αριθμό z_1 και τον μοναδικό φανταστικό αριθμό z_2 οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

γ. Για τους αριθμούς που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα να αποδείξετε ότι $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 40$.

270) $\Rightarrow$ Επαναληπτική

Δίνεται ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης

$$z^2 + \beta z + \gamma = 0, \text{ όπου } \beta \text{ και } \gamma \text{ πραγματικοί αριθμοί.}$$

α) Να αποδείξετε ότι $\beta = -1$ και $\gamma = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι $z_1^3 = -1$.

γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού w , για τον οποίο ισχύει: $|w| = |z_1 - \bar{z}_1|$.

271) $\Rightarrow$ Επαναληπτική

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \frac{2 - \bar{z}_1}{2 + \bar{z}_1}$, όπου

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\beta \neq 0$. Δίνεται επίσης ότι $z_2 - z_1 \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $z_2 - z_1 = 1$.

β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z_1 στο μιγαδικό επίπεδο.

γ) Αν ο αριθμός z_1^2 είναι φανταστικός και $\alpha\beta > 0$, να υπολογιστεί ο z_1 και να δειχθεί ότι $(z_1 + 1 + i)^{20} - (\bar{z}_1 + 1 - i)^{20} = 0$.

272) $\Rightarrow$ Επαναληπτική

α) Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 4 + 4i \\ 2z_1 - z_2 = 5 + 5i \end{cases}, \text{ να βρείτε τους } z_1, z_2.$$

β) Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w ισχύουν $|z - 1 - 3i| \leq \sqrt{2}$ και $|w - 3 - i| \leq \sqrt{2}$:

- i) Να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί αριθμοί z, w έτσι ώστε $z=w$
 ii) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z - w|$.

273) $\Rightarrow$ **Επαναληπτική**

α) Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο (Σ) των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις : $|z|=2$ και

$$\operatorname{Im}(z) \geq 0.$$

β) Να αποδείξετε ότι, αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στο σύνολο (Σ) , τότε η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{4}{z} \right)$

κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο βρίσκεται στον άξονα

x'x. 274) $\Rightarrow$ **Επαναληπτική**

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει: $|z + 16| = 4|z + 1|$.

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει: $|z - 1| = |z - i|$.

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των δύο γεωμετρικών τόπων.

275) ⇨ **Απολυτήριες Εξετάσεις**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις: $|z - 3|^2 + |z + 3|^2 = 36$ και $|2w - 1| = |w - 2|$.

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=3$

B2. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1 - z_2| = 3\sqrt{2}$ να βρείτε το $|z_1 + z_2|$.

B3. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=1$.

276) ⇨ **Απολυτήριες Εξετάσεις**

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με $z \neq 3i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις: $|z - 3i| + |\bar{z} + 3i| = 2$ και $w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i}$.

B1. Να τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z .

B2. Να αποδείξετε ότι $\bar{z} + 3i = \frac{1}{z - 3i}$

B3. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2 \leq w \leq 2$. **B4.** Να αποδείξετε ότι: $|z - w| = |z|$.

277) ⇨ **Απολυτήριες Εξετάσεις**

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$.

B1. Αν ισχύει ότι $2z - i\bar{z} = 3$, τότε να βρείτε το μιγαδικό αριθμό z .

B2. Αν $z = 2 + i$, τότε να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w για τους οποίους ισχύει ότι: $|w + z| = |z^2|$.

B3. Αν $z = 2 + i$ και $u = \frac{\bar{z} + iz}{\bar{z} - 1}$, τότε να αποδείξετε ότι: $u^{2010} = -1$.

278) ⇨ **Απολυτήριες Εξετάσεις**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 2 + 3i$ και $z_2 = (1 - i)^2 + 3i^{2009} + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $z_2 = 1 + i$.

β) Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού αριθμού $\bar{z}_1 - z_2$.

γ) Να εκφράσετε το πηλίκο $\frac{z_1}{z_2}$ στη μορφή $\kappa + \lambda i$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

279) ⇨ **Απολυτήριες Εξετάσεις**

Δίνεται η εξίσωση $3z^2 + \lambda z + \mu = 0$, όπου λ, μ είναι πραγματικοί αριθμοί.

A. Αν ο αριθμός $z_1 = 1 + i$ είναι ρίζα της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι $\lambda = -6$, $\mu = 6$ και να βρείτε τη δεύτερη ρίζα z_2 της εξίσωσης.

B. Να αποδείξετε ότι :

α. $z_1^2 + z_2^2 = 0$

β. $z_1^{2008} + z_2^{2008} = 2^{1005}$

280) $\Rightarrow$ **Απολυτήριες Εξετάσεις**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = (\lambda - 2) + 2\lambda i$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z .

β) Αν ισχύει $z + \bar{z} = 2$, να βρείτε το $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$.

γ) Αν $|z| = 2$ και $\operatorname{Im}(z) \neq 0$, να βρείτε το λ .

281) $\Rightarrow$ **Απολυτήριες Εξετάσεις**

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + 13 = 0$, (1)

α) Να λυθεί στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών την εξίσωση (1).

β) Αν z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1), τότε να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A = |z_1|^2 - 2|z_1 \cdot z_2| + \sqrt{13}|\bar{z}_2| + i^{2006}$.

γ) Αν $z_1 = 2 + 3i$ τότε να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει $|z - z_1| = 5$.

282) $\Rightarrow$ **Απολυτήριες Εξετάσεις**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί: $z = \lambda^2 - 2 + (3 - 2\lambda)i$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και

$w = \kappa + 4i$, $\kappa > 0$. Για τους z, w ισχύουν: $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 0$ και $|w| = 5$.

α) Να αποδείξετε ότι $z = -1 + i$,

β) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\mu \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $z + \mu\bar{z} = 3i - w$.

283) $\Rightarrow$ **Απολυτήριες Εξετάσεις**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = x + yi$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, για τους οποίους υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^2 i = \alpha + (1 - \alpha)i.$$

Να αποδείξετε ότι : α) αν $\operatorname{Im}(z) = 0$ τότε $\alpha = 1$.

β) αν $\alpha = 0$, τότε $z^2 + 1 = 0$.

γ) για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει $0 \leq \alpha \leq 1$.

δ) οι εικόνες M των μιγαδικών αυτών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

284) $\Rightarrow$ **Επαναληπτική**

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = x + yi$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί,

και $w = \frac{i(i+z)}{i-z}$ με $z \neq i$. Να αποδείξετε ότι :

$$\alpha) w = \frac{2x}{x^2 + (y-1)^2} + \frac{1-x^2-y^2}{x^2 + (y-1)^2}i$$

β) Αν ο w είναι πραγματικός αριθμός, τότε η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $\rho_1 = 1$ και

γ) αν ο z είναι πραγματικός αριθμός, τότε η εικόνα του w ανήκει σε κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $\rho_2 = 1$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

285) ⇨ Επαναληπτική

Θεωρούμε την εξίσωση $z^2 - 6z + \gamma = 0$, με $\gamma \in \mathbb{R}$ η οποία έχει ρίζες τους μιγαδικούς z_1, z_2 με $\text{Im}(z_1) > 0$ και $|z_1| = 5$.

α) Να αποδείξετε ότι $\gamma = 25$.

β) Αν $\gamma = 25$, να βρείτε τις ρίζες της πραγματικής εξίσωσης.

γ) Αν για τον μιγαδικό αριθμό w ισχύει $|w - z_1| = |w - z_2|$ να αποδείξετε ότι $w \in \mathbb{R}$.

δ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$(z_1 - 2 - 3i)^8 + (z_2 - 4 + 5i)^8$$

286) ⇨ Επαναληπτική

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει $|z - 1 + i| = |iz|$.

α) i) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων M των μιγαδικών z .

ii) Να βρείτε ποια από τα σημεία M απέχουν από την αρχή $O(0,0)$ απόσταση ίση με $\sqrt{5}$.

β) Αν $\text{Re}(z) = 0$, τότε να δείξετε ότι $z = -i$.

287) ⇨ Επαναληπτική

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{x + 3i}{2 - i}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το x , ώστε ο αριθμός z να είναι φανταστικός.

β) Αν $x = -6$, να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός.

γ) Αν $x = 4$ να βρείτε το $|z|$.

288) ⇨ Επαναληπτική

Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z = x + yi$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, για τους οποίους υπάρχει $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει: $x = 3 - \kappa$ και $y = 2\kappa + 1$. Να αποδείξετε ότι:

α) αν $3\text{Re}(z) + 4\text{Im}(z) = 3$ τότε $\kappa = -2$

β) αν $|z - 1| = \sqrt{5}$, τότε $|z| = \sqrt{10}$.

γ) Οι εικόνες M των μιγαδικών αυτών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν σε ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΟΜΟΓΕΝΩΝ

289) ⇨ Εξετάσεις Ομογενών 2011

Έστω $w = z + \frac{4}{z}$, όπου z μιγαδικός αριθμός με $z \neq 0$.

B1. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 για τους οποίους ισχύει $w=2$.

B2. Αν $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ και $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ είναι οι μιγαδικοί αριθμοί που βρήκατε στο ερώτημα B1, τότε να αποδείξετε ότι $z_1^3 = z_2^3 = -8$

B3. Αν z_1 και z_2 είναι οι μιγαδικοί αριθμοί του προηγούμενου ερωτήματος, τότε να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 και $z_3 = \frac{z_1^3}{4}$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

B4. Αν $|z| = 2$, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός w είναι πραγματικός.

290) ⇨ Εξετάσεις Ομογενών 2010

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z για τους οποίους ισχύει $|z| = |z - 2i|$.

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ευθεία με εξίσωση $\psi=1$.

B2. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z , να βρείτε εκείνους που έχουν μέτρο ίσο με $\sqrt{2}$.

B3. Έστω $z_1 = 1 + i$, και $z_2 = -1 + i$ οι μιγαδικοί αριθμοί που βρήκατε στο ερώτημα B2. Να αποδείξετε ότι $z_1^4 + z_2^4 = -8$.

291) ⇨ Εξετάσεις Ομογενών 2009

Δίνεται ο μιγαδικός $z = \frac{1}{1+i} - \frac{i(i-3)}{2}$.

α. Να αποδείξετε ότι $-\bar{z} = -1 + i$, $z^2 = 2i$, $z^3 = -2 + 2i$.

β. Αν A, B, Γ είναι οι εικόνες των μιγαδικών $-\bar{z}$, z^2 και z^3 , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

γ. Να αποδείξετε ότι $|z^3 - z^2|^2 = |z^2 + \bar{z}|^2 + |z^3 + \bar{z}|^2$.

292) ⇨ Εξετάσεις Ομογενών 2008

A. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = k + (k+1)i$, $k \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η ευθεία $y=x+1$.

β) Ποιοι από αυτούς τους μιγαδικούς αριθμούς έχουν $|z|=1$;

B. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει :

$\alpha^2 + \beta^2 + 8 = (1-i)^4 \beta - (1+i)^4 \alpha$, να δείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=-2$.

293) ⇨ **Εξετάσεις Ομογενών 2007**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = i$, $z_2 = 1$ και $z_3 = 1 + i$.

α) Να αποδείξετε ότι: $|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_3|^2$.

β) Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z - z_1| = |z - z_2|$, τότε να αποδείξετε ότι:

i) $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$.

ii) για $z \neq 0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$.

294) ⇨ **Εξετάσεις Ομογενών 2006**

Έστω ότι για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $(5z - 1)^5 = (z - 5)^5$.

α) Να δείξετε ότι $|5z - 1| = |z - 5|$.

β) Να δείξετε ότι $|z| = 1$.

γ) Αν $w = 5z + 1$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων $M(w)$ στο μιγαδικό επίπεδο.

295) ⇨ **Εξετάσεις Ομογενών 2005**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 3 + i$ και $z_2 = 1 - 3i$.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{z_1}{z_2} = i$ και $|iz_1 + z_2|^2 = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι $z_1^{2006} + z_2^{2006} = 0$.

γ) Θεωρούμε το μιγαδικό αριθμό $w = \frac{\kappa z_1 - iz_2}{z_2 - \kappa z_1}$, $\kappa \in \mathbb{R} - \{1\}$, να

αποδείξετε ότι ισχύει $\operatorname{Im}(w) = -1$, για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.

296) ⇨ **Εξετάσεις Ομογενών 2004**

Έστω z μιγαδικός αριθμός, με $z \neq \pm i$, και $w = \frac{z}{z^2 + 1}$.

α) Να αποδείξετε ότι αν ο w είναι πραγματικός, τότε ο z είναι πραγματικός ή $|z| = 1$.

β) Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, την εξίσωση

$$\frac{z}{z^2 + 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

γ) Αν z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (β) να

υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\kappa = \frac{(z_1 z_2)^3 - i}{4 + (z_1 + z_2)^2}$.

297) ⇨ **Εξετάσεις Ομογενών 2003**

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(z) = \frac{z + i}{z}$, όπου z μιγαδικός με $z \neq 0$.

- α) Αν $|f(z)| = |f(\bar{z})|$, να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός.
 β) Αν $|f(z)| = 1$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο.
 γ) Αν $\operatorname{Re}(f(z)) = 2$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες του μιγαδικού αριθμού z βρίσκονται σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

298) $\Rightarrow$ **Εξετάσεις Ομογενών 2002**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 1 - 2i$ και $z_2 = 3 + 4i$.

- α) Αν $\frac{z_2}{z_1} = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $x = -1$, και $y = 2$.
 β) Αν μια ρίζα της εξίσωσης $x^2 + \beta x + 2\gamma = 0$, όπου $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, είναι η $\frac{z_2}{z_1}$ να βρείτε τις τιμές των β και γ .
 γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει: $|z - 2z_1| = |z_2|$.

299) $\Rightarrow$ **Εξετάσεις Ομογενών 2001**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w τέτοιοι ώστε $w = \frac{z - 3i}{1 + i}$.

- α) Αν $w = 2 - 2i$ τότε το μέτρο του μιγαδικού z είναι :

A. 3 B. 4 Γ. 5 Δ. 2

Να γράψετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

- β) Αν $|w| = 2\sqrt{2}$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του.

- γ) Αν $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι $\operatorname{Re}(w) = \frac{x + y - 3}{2}$ και

$$\operatorname{Im}(w) = \frac{-x + y - 3}{2}$$

Α ΔΕΣΜΗ

300) ⇨ Εξετάσεις Α Δέσμης 1999

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι στο μιγαδικό επίπεδο ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ που είναι τέτοια ώστε : $|z - 1|^2 + |z - 3 - 2i|^2 = 6$ είναι κύκλος του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

301) ⇨ Εξετάσεις Α Δέσμης 1995

Να αποδείξετε ότι για οποιουδήποτε μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 ισχύει $|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2$ αν και μόνο αν $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = 0$.

302) ⇨ Εξετάσεις Α Δέσμης 1994

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w και w_1 τέτοιους ώστε $w = z - zi$ και $w_1 = \frac{1}{a} + ai$, $a \in \mathbb{R}$ με $a \neq 0$. Να αποδείξετε ότι αν το a μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$ με $a \neq 0$ και ισχύει $w = \bar{w}_1$ τότε η εικόνα P του z στο μιγαδικό επίπεδο κινείται σε μια υπερβολή.

303) ⇨ Εξετάσεις Α Δέσμης 1993

Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{z+\bar{z}}$ με z μιγαδικό και $\operatorname{Re}(z) \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right) = f(z)$

β) Να βρείτε το είδος της καμπύλης στην οποία ανήκουν τα σημεία $M(x, y)$ για τα οποία οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha x + \beta yi$ με $\alpha, \beta, x, y \in \mathbb{R}$ και $\alpha\beta x \neq 0$ ικανοποιούν τη σχέση : $\operatorname{Re}[f(z)] = 0$.

304) ⇨ Εξετάσεις Α Δέσμης 1991

Αν $w = \frac{z + \alpha i}{iz + \alpha}$ με α πραγματικό αριθμό και $\alpha > 0$, $z \neq \alpha i$, τότε να

αποδείξετε ότι:

α) ο w είναι φανταστικός αριθμός αν και μόνο αν ο z είναι φανταστικός.

β) ισχύει $|w| = 1$ αν και μόνο αν ο z είναι πραγματικός.

305) ⇨ Εξετάσεις Α Δέσμης 1986

Έστω $z = (2x - 3) + (2y - 1)i$ με $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι στο μιγαδικό επίπεδο ο γεωμετρικός τόπος των σημείων (x, y) που είναι τέτοια ώστε $|2z - 1 + 3i| = 3$ είναι κύκλος, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ Ο.Ε.Φ.Ε.

306) ⇨ Εξετάσεις Προσομοίωσης Ο.Ε.Φ.Ε. 2001

Δίνεται ο μιγαδικός z και έστω $f(z) = \frac{2+i \cdot \bar{z}}{1-\bar{z}}$, $z \neq 1$.

α) Να γράψετε το μιγαδικό $f(2)$ στην κανονική του μορφή, και να βρείτε το μέτρο του.

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w = [f(2)]^{2004}$ είναι πραγματικός αριθμός.

γ) Να αποδείξετε ότι $\left| \frac{f(z)-2}{f(z)+i} \right| = |z|$.

δ) Αν $|z|=1$ και M είναι η εικόνα του $f(z)$ στο μιγαδικό επίπεδο, να αποδείξετε ότι το M ανήκει σε μια ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση και την ελάχιστη απόσταση απ την αρχή των αξόνων.

307) ⇨ Εξετάσεις Προσομοίωσης Ο.Ε.Φ.Ε. 2003

Δίνονται συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $0 < \alpha < \beta$ και οι μιγαδικοί $z = \alpha + \beta i$, $w = f(\alpha) + f(\beta) \cdot i$ με $f(\beta) \neq 0$.

A) Να αποδείξετε ότι :

α) Ο αριθμός $z_1 = \frac{1 + \beta - i \cdot \bar{z}}{1 + f(\beta) - i \cdot \bar{w}}$ είναι πραγματικός αν και μόνο αν

$$f(\alpha) = \alpha.$$

β) Αν $z = -i \cdot w$ τότε οι εικόνες των z, w στο μιγαδικό επίπεδο και η αρχή των αξόνων $O(0,0)$ είναι κορυφές ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου.

B) Έστω ότι ισχύει : $|z - iw|^2 = |z|^2 + |iw|^2$, να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha) = 0$.

β) οι εικόνες των z, w και η αρχή των αξόνων $O(0,0)$ είναι συνευθειακά σημεία.

308) ⇨ Εξετάσεις Προσομοίωσης Ο.Ε.Φ.Ε. 2006

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $w = \frac{z+i}{1+iz}$, όπου $z \neq i$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\left| \frac{w-i}{w+i} \right| = |z|$.

β) Αν $|z|=1$ και M η εικόνα του w στο μιγαδικό επίπεδο, να αποδείξετε ότι το σημείο M ανήκει στον άξονα $x'x$.

γ) Να αποδείξετε ότι : $w \in I \Leftrightarrow z \in I$.

309) $\Rightarrow$ **Εξετάσεις Προσομοίωσης Ο.Ε.Φ.Ε. 2007**

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $z \cdot w \neq 0$, για τους οποίους ισχύει:

$$|z + w| = |z - w|. \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

α) $\operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}) = 0$

β) Ο αριθμός $\frac{z}{w}$ είναι φανταστικός

γ) Το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των z, w στο μιγαδικό επίπεδο και η αρχή των αξόνων, είναι ορθογώνιο στο O .

310) $\Rightarrow$ **Εξετάσεις Προσομοίωσης Ο.Ε.Φ.Ε. 2009**

Δίνεται η εξίσωση $z + \frac{1}{z} = -1, z \in \mathbb{C}$ και z_1, z_2 οι ρίζες της.

Να αποδείξετε ότι:

α) $z_1 \cdot z_2 = 1$ και $z_1^3 = z_2^3 = 1$

β) $(z_1^{2009} + z_2^{2009}) \in \mathbb{R}$

γ) $z_1^8 + \frac{1}{z_2^{10}} + 1 = 0$

δ) Αν Γ είναι η εικόνα του μιγαδικού $w = 2z_1 + 2z_2$ και A, B οι εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα, να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

311) $\Rightarrow$ **Εξετάσεις Προσομοίωσης Ο.Ε.Φ.Ε. 2010**

Οι μιγαδικοί αριθμοί z, w συνδέονται με τη σχέση $z = \frac{1+2w}{1-w}$, και η

εικόνα του w ανήκει σε κύκλο με κέντρο $K(-1,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

α) Να δείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

β) Αν $|z|=1$ και z_1, z_2, z_3 τρεις μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει η σχέση (1), να δείξετε ότι :

i) $\alpha = \frac{z_1 + z_2}{z_3} + \frac{z_2 + z_3}{z_1} + \frac{z_1 + z_3}{z_2} \in \mathbb{R}$

ii) Αν επιπλέον ισχύει $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ να δείξετε ότι

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}\right) = -\frac{3}{2}.$$

γ) Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): 3x + 4y - 12 = 0$. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη απόσταση των εικόνων του μιγαδικού w από την ευθεία (ε) .