

ΠΑΝΟΣ

4 Μαρ 2017

ΠΑΝΟΣ ΣΑΡΑΚΗΝΟΣ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Διαφορικές εξισώσεις

1) Συνάρτηση μοντέλα φυσικού κόσμου

Εξισώσεις διαφορών

2) Διακριτά μοντέλα

1) Διαφορικές εξισώσεις:

$$y' - 3xy = 20, \quad f''(t) + 5f(t) = \cos t, \quad \frac{d^2x}{dp^2} + p \frac{dx}{dp} = 3x + p$$

Αν η άγνωστη συνάρτηση εξαρτάται μόνο από μία μεταβλητή τότε λέγεται αυτήθους διαφορική εξίσωση.

η εξίσωση $\frac{\partial^2 Q}{\partial k^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial h^2} = 0$ είναι

$$Q = Q(k, h)$$

ψευδή διαφορική εξίσωση

Γενική μορφή αυτών των διαφορικών εξισώσεων

$$y^{(n)} = G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Είναι η τάξη της διαφορικής εξίσωσης

Μια διαφορική εξίσωση είναι συνάρτηση $y(x)$ που ορίζεται σε ένα διάστημα, πραγματικών αριθμών I και ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση σε αυτό το διάστημα.

2

• $y(x) = \cos x$ είναι λύση της συνήθους διαφορικής
εξίσωσης $2^{\text{ης}} \text{ τάξης}$:

$$y''(x) + y(x) = 0 \quad \text{στο διάστημα } (-\infty, +\infty)$$

• $D(p) = \sqrt{10-p}$ λύση της συνήθους διαφορικής
εξίσωσης $1^{\text{ης}} \text{ τάξης}$

$$\frac{dD}{dp} \neq \frac{1}{2D} = 0 \quad \text{στο διάστημα } (-\infty, 10)$$

Μια συνήθης διαφορική εξίσωση (Δ.Ε.) μπορεί
να δέχεται παραπάνω από μία λύσεις.

π.χ. η εξίσωση

$$y''(x) - 4y(x) = 0$$

έχει λύσεις $y(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x} \quad \forall A, B \in \mathbb{R}$
στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$

1) ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΟΤΗΣ
ΤΑΞΗΣ ΧΟΡΙΖΟΜΕΝΟΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΝ

$$A(x)dx + B(y)dy = 0 \Rightarrow$$

$$\int A(x)dx + \int B(y)dy = C \quad \text{κ.τ.τ}$$

π.χ i) $x dx - y^2 dy = 0 \Rightarrow \int x dx - \int y^2 dy = C \Rightarrow$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3} = C \Rightarrow y^3 = \frac{3}{2}x^2 - 3C \Rightarrow$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + k} \quad \text{όπου } k = -3C$$

ii) $y' = y^2 x^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y^2 x^3 \Rightarrow x^3 dx = \frac{1}{y^2} dy = 0$

$$\frac{x^4}{4} + \frac{1}{y} = C \Rightarrow \frac{1}{y} = C - \frac{x^4}{4} \Rightarrow y = \frac{4}{4C - x^4}$$

$$y = \frac{-4}{x^4 k} \quad k = -4C$$

iii) $y' = 5y \Rightarrow \frac{dy}{dx} - 5y = 0 \Rightarrow \frac{1}{y} dy - 5dx = 0$

$$\ln|y| - 5x = C \Rightarrow \ln|y| = 5x + C \Rightarrow |y| = e^{5x} \cdot e^C$$

$$y = \pm k \cdot e^{5x} \quad k = e^C$$

4

$$iv) y' = \frac{x+1}{y^4+1} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y^4+1} \Leftrightarrow$$

$$\cancel{dx(x+1)} (x+1) \cdot dx = (y^4+1) dy = 0$$

$$\frac{x^2}{2} + x - \frac{y^5}{5} + y = C$$

η ελάχιστη δυνατή απόσταση που μπορεί να υπάρξει με τη γειτονική κορυφή και δεν μπορεί να υπάρξει μεγαλύτερη ως προς y.

$$v) e^x dx - y dy = 0 \Leftrightarrow \int e^x dx - \int y dy = C \quad y(0) = 1$$

$$e^x - \frac{y^2}{2} = C \leadsto \frac{y^2}{2} = e^x - C \leadsto y^2 = 2e^x - 2C$$

$$y = \sqrt{2e^x + K}$$

$$1 = \sqrt{2+K} \leadsto K = -1$$

$$2e^x - 1 > 0 \quad y = \sqrt{2e^x - 1} \quad 2e^x - 1 \neq 0$$

$$\leadsto e^x > \frac{1}{2} \quad x > -\ln 2$$

Να λυθεί η Εξίσωση:

$$x \cos x dx + (1 - 6y^5) dy = 0 \quad \mu \varepsilon \quad y(\pi) = 0$$

Λύνω

$$\int x \cos x dx = \int (6y^5 - 1) dy \quad (I)$$

$$\int (6y^5 - 1) dy = y^6 - y + C_1$$

$$\int x \cos x dx = \int x (\sin x)' dx = x \cdot \sin x - \int \sin x dx$$

$$= x \sin x + \cos x$$

$$(I) \Rightarrow x \sin x + \cos x = y^6 - y + C_1$$

από $y(\pi) = 0$ έχω

$$\pi \sin \pi + \cos \pi = 0 - 0 + C_1$$

$$0 - 1 = C_1 \rightarrow C_1 = -1$$

άρα λύνω τις Δ.Ε. είναι

$$x \sin x + \cos x = y^6 - y - 1$$

Να λυθεί η Εξίσωση

$$(x^2 + 1) dx + \frac{1}{y} dy = 0 \quad \mu \varepsilon \quad y(-1) = 1$$

Λύνω

$$(x^2 + 1) dx = -\frac{1}{y} dy \rightarrow \int (x^2 + 1) dx = -\int \frac{1}{y} dy$$

$$\ln |y| = -\frac{x^3}{3} + x + C_1 \quad (I) \quad \text{όπου } y(-1) = 1$$

άρα $\ln 1 = \frac{1}{3} + 1 + C_1 \rightarrow C_1 = -\frac{4}{3}$

6)

and $\ln|y| = -\frac{x^3}{3} - x - \frac{4}{3} \rightarrow$

$$|y| = e^{-\frac{1}{3}(x^3 + 3x + 4)}$$

$$y = e^{-\frac{1}{3}(x^3 + 3x + 4)}$$

2) ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ με $\boxed{f(tx, ty) = f(x, y)}$ ΠΡΟΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Στην ομογενή $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ θέτουμε $y = xv$

οπότε

$$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

i) Για να λύσουμε την εξίσωση:

$$y' = \frac{y+x}{x} \quad (1)$$

Λύση: Ομογενής 1^{ου} βαθμού

Θέτω $y = xv$ οπότε $\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$ οπότε έχουμε

$$(1) \Leftrightarrow v + x \frac{dv}{dx} = \frac{xv+x}{x} \Leftrightarrow v + x \frac{dv}{dx} = v + 1 \Leftrightarrow$$

$$x \frac{dv}{dx} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} dx - dv = 0 \rightarrow \frac{1}{x} dx = dv \Leftrightarrow 0$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \int 1 dv \Leftrightarrow \ln|x| - v = C \rightarrow$$

$$v = \ln|x| - C \rightarrow v = \ln|x| + \ln|k| \quad (\ln|k| = -C)$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{x} = \ln|kx| \rightarrow y = x \ln|kx|$$

$$ii) \quad y' = \frac{2y^4 + x^4}{xy^3}$$

ορίω $y = xv$

$$\text{ορίζω} \quad v + x \frac{dv}{dx} = \frac{2x^4v^4 + x^4}{x^4v^3} \quad \sim$$

$$v + x \frac{dv}{dx} = 2v + \frac{1}{v^3} \quad \sim \quad x \frac{dv}{dx} = \frac{v^4 + 1}{v^3}$$

$$\frac{x}{dx} = \frac{v^4 + 1}{v^3 dv} \quad \sim \quad \frac{1}{x} dx = \frac{v^3}{v^4 + 1} dv = 0$$

$$\int \frac{1}{x} dx - \int \frac{v^3}{v^4 + 1} dv = C \quad \Rightarrow$$

$$\ln|x| - \frac{1}{4} \ln|v^4 + 1| = C \quad \sim \quad \frac{1}{4} \ln|v^4 + 1| = \ln|x| + \ln|k|$$

$$\frac{1}{4} \ln(v^4 + 1) = \ln(kx) \quad \sim \quad v^4 + 1 = (kx)^4 \quad C = -\ln|k|$$

$$\frac{y^4}{x^4} + 1 = kx^4 \quad \sim \quad y^4 = kx^4 - x^4$$

2ος τρόπος

$$\frac{1}{y'} = \frac{xy^3}{2y^4 + x^4}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{xy^3}{2y^4 + x^4}$$

$$x = yu$$

$$u + y \frac{du}{dy} = \frac{y^3 u^3}{2y^4 + y^4 u^4} \rightarrow$$

$$u + y \frac{du}{dy} = \frac{u^3}{2 + u^4} \rightarrow y \frac{du}{dy} = \frac{u^3}{2 + u^4} - u$$

$$y \frac{du}{dy} = \frac{u^3}{2 + u^4} - u \rightarrow y \frac{du}{dy} = -\frac{u + u^5}{2 + u^4}$$

$$\frac{1}{y} dy + \frac{2 + u^4}{u + u^5} du = 0$$

~~$$\frac{2 + u^4}{u(1 + u^4)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1 + u^4} \quad 2 + u^4 = Au + Bu + A$$~~

~~$$2 + u^4 = A(1 + u^4) + Bu$$~~

$$\frac{2 + u^4}{u(1 + u^4)} = \frac{2}{u} - \frac{u^3}{1 + u^4}$$

$$\ln|y| + 2\ln|u| - \frac{1}{4}\ln(1 + u^4) = C$$

$$\ln y^4 + \ln u^8 - \ln(1 + u^4) = C \rightarrow \ln \frac{y^4 u^8}{1 + u^4} = C$$

$$\ln \frac{y^4 x^8}{y^4 + x^4} = C \rightarrow \ln \frac{x^8}{y^4 + x^4} = C \quad C = \ln k$$

$$\frac{x^8}{y^4 + x^4} = k \rightarrow y^4 + x^4 = \frac{1}{k} x^8 \rightarrow y^4 = \frac{1}{k} x^8 - x^4$$

Να λυθεί η Εξίσωση:

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2} \quad (I)$$

Λύση: Είναι ομογενής διότι $P(x, y) = \frac{2x^2y}{x^2 - y^2} - \frac{2xy}{x^2 - y^2} = f(x, y)$

Θέτω $y = xu$ οπότε $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$

οπότε (I) $\leadsto u + x \frac{du}{dx} = \frac{2x^2u}{x^2 - x^2u^2} \leadsto$

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{2u}{1 - u^2} \leadsto x \frac{du}{dx} = \frac{2u - u + u^3}{1 - u^2} \leadsto$$

$$x \frac{du}{dx} = \frac{u^3}{1 - u^2} \leadsto \frac{1 - u^2}{u^3} du = \frac{1}{x} dx$$

$$\frac{1 - u^2}{u(u^2 + 1)} du = \frac{1}{x} dx \quad \left(\text{όπως } \frac{1 - u^2}{u(u^2 + 1)} = -\frac{2u}{u^2 + 1} + \frac{1}{u} \right)$$

$$\left(\frac{1}{u} - \frac{2u}{u^2 + 1} \right) du = \frac{1}{x} dx \quad \int \left(\frac{1}{u} - \frac{2u}{u^2 + 1} \right) du = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln|u| - \ln|u^2 + 1| = \ln|x| + C_1$$

$$\frac{u^2 + 1}{u} = \ln \frac{|u|}{u^2 + 1} = \ln kx$$

$$\frac{u}{u^2 + 1} = \ln kx \quad \frac{\frac{u}{x}}{\frac{u^2}{x^2} + 1} = kx \quad \frac{\frac{y}{x}}{\frac{y^2}{x^2} + 1} = kx \leadsto$$

$$\frac{y}{y^2 + x^2} = k \leadsto x^2 + y^2 = \frac{1}{k} y$$

3) ΠΛΗΡΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ $\in \equiv 1205 \in 12$
 $A' TA \equiv H2$

Είναι η διαφορική εξίσωση της μορφής

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

όπου $\frac{dM(x, y)}{dy} = \frac{dN(x, y)}{dx}$

π.χ. $2xy dx + (1+x^2)dy = 0$ $\frac{d(2xy)}{dy} = 2x = \frac{d(1+x^2)}{dx}$

Για να την λύσουμε πρώτα υπολογίζουμε την $f(x, y)$ τέτοια ώστε

$$df(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

Μέθοδος

$$\frac{df(x, y)}{dx} = M(x, y)$$

$$\frac{df(x, y)}{dy} = N(x, y)$$

και έχω την ζητούμενη μορφή
 $f(x, y) = C$

i) Να γράψετε η εξίσωση:

$$\underbrace{2xy dx}_{M(x,y)} + \underbrace{(1+x^2) dy}_{N(x,y)} = 0$$

ηγέρηκ πατι $\frac{dM}{dy} = 2x = \frac{dN}{dx}$

Μέθοδος

α) $\int 2xy dx = yx^2$

όρα $g(x,y) = yx^2 + h(y)$

β) $\frac{dg}{dy} = 1+x^2$

$x^2 + h'(y) = 1+x^2 \sim h'(y) = 1$

όρα $h(y) = y + C_1$

γ) $g(x,y) = yx^2 + y + C_1$

Επομένως $g(x,y) = C$

$yx^2 + y + C_1 = C$

$yx^2 + y = C_2$ όταν $C_2 = C - C_1$

Επομένως

$$\boxed{y = \frac{C_2}{x^2 + 1}}$$

ii) Να γυρίσει η επίλυση:

$$\underbrace{(x + \sin y)}_{M(x,y)} dx + \underbrace{(x \cos y - 2y)}_{N(x,y)} dy = 0$$

η οποία γράφεται $\frac{dM(x,y)}{dy} = \cos y = \frac{dN(x,y)}{dx}$

a) $\int (x + \sin y) dx = \frac{x^2}{2} + x \sin y$

όρα $g(x,y) = \frac{x^2}{2} + x \sin y + h(y)$ ①

b) $\frac{dg(x,y)}{dy} = x \cos y - 2y$

$$x \cos y + h'(y) = x \cos y - 2y \rightarrow h'(y) = -2y$$

όρα $h(y) = -y^2 + C_1$

επιστρέφουμε στο ①

$$g(x,y) = \frac{x^2}{2} + x \sin y - y^2 + C_1 = C \quad (g(x,y) = C)$$

$$\frac{x^2}{2} + x \sin y - y^2 = C_2 \quad C = C_1$$

14

Na 2081

$$ii) \quad y' = \frac{2 + ye^{xy}}{2y - xe^{xy}}$$

Nöy

$$(2 + ye^{xy}) dx = (2y - xe^{xy}) dy \rightarrow$$

$$\underbrace{(2 + ye^{xy})}_{M(x,y)} dx + \underbrace{(x e^{xy} - 2y)}_{N(x,y)} dy = 0$$

$$dg(x, y) = M(x, y) dx + N(x, y) dy$$

$$\frac{dM(x, y)}{dy} = e^{xy} + xy e^{xy} = \frac{dN(x, y)}{dx}$$

$$\int (2 + ye^{xy}) dx = 2x + y \cdot \frac{1}{y} e^{xy} + h(y)$$

$$a'pa \quad g(x, y) = 2x + e^{xy} + h(y)$$

$$b) \quad \frac{dg(x, y)}{dy} = \cancel{2y} \cancel{+ e^{xy}} x e^{xy} - 2y$$

$$x e^{xy} + h'(y) = x e^{xy} - 2y$$

$$h'(y) = -2y \rightarrow h(y) = -y^2 + C_1$$

$$a'pa \quad g(x, y) = 2x + e^{xy} - y^2 + C_1 = C_2$$

$$\boxed{2x + e^{xy} - y^2 = C} \quad C = C_2 - C_1$$

Να υποβεί η Δ.Ε

$$\underbrace{(y \sin x + x y \cos x)}_{M(x,y)} dx + \underbrace{(x \sin x + 1)}_{N(x,y)} dy = 0$$

α) Η Δ.Ε είναι πηχρής δ.ότι

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \sin x + x \cos x$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \sin x + x \cos x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

β) Θέλω να βρω $g(x,y)$ συνάρτηση:

$$dg(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

$$\int (y \sin x + x y \cos x) dx = -y \cos x + y \int x \cos x dx =$$

$$= -y \cos x + y \int x (\sin x)' dx = -y \cos x + x y \sin x - y \int \sin x dx$$

$$= -y \cos x + x y \sin x + y \cos x = x y \sin x$$

$$\text{οπότε } g(x,y) = x y \sin x + h(y)$$

$$\frac{dg}{dy} = x \sin x + h'(y) \quad N(x,y) = x \sin x + 1$$

$$\text{οπότε } x \sin x + h'(y) = x \sin x + 1 \rightarrow h'(y) = 1 \rightarrow h(y) = y + C_1$$

$$\text{οπότε } g(x,y) = x y \sin x + y + C_1$$

$$dg(x,y) = 0 \rightarrow x y \sin x + y + C_1 = C_2 \rightarrow$$

$$x y \sin x + y = C \quad C = C_2 - C_1$$

4) ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

i) Να λυθεί η εξίσωση:

$$ydx - xdy = 0 \rightarrow xdy - ydx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} = 0 \rightarrow \text{ΠΑΝΟΣ} \quad d\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \rightarrow$$

4 Mar 2017

$$\frac{y}{x} = c \rightarrow y = cx \quad \text{προσδοκία ολοκλήρωσης}$$

$$I = \frac{1}{x^2}$$

ii) 2ος τρόπος

$$xdy - ydx = 0 \rightarrow \frac{xdy - ydx}{xy} = 0 \rightarrow$$

$$d\left[\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right] = 0 \rightarrow \ln\left(\frac{y}{x}\right) = c_1 \rightarrow \frac{y}{x} = e^{c_1} \rightarrow$$

$$y = cx \quad \text{όπου} \quad c = e^{c_1}$$

ii) Να λυθεί η εξίσωση:

$$(y^2 - y)dx + xdy = 0 \rightarrow y(ydx - xdy) = y^2 dx$$

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} = dx \rightarrow d\left(\frac{x}{y}\right) = dx \rightarrow$$

$$\frac{x}{y} = x + c \rightarrow$$

$$y = \frac{x}{x+c}$$

17

$$\text{ii)} \quad (y - xy^2)dx + (x + x^2y^2)dy = 0 \quad (1)$$

0 $\frac{1}{x^2}$ $\frac{1}{y^2}$
 $\frac{1}{x}$ $\frac{1}{y}$ $\frac{1}{y^2}$

$$(y dx + x dy) + (-xy^2 dx + x^2y^2 dy) = 0 \rightsquigarrow$$

$$\frac{y dx + x dy}{(xy)^2} + \frac{-xy^2 dx + x^2y^2 dy}{(xy)^2} = 0$$

$$d\left(-\frac{1}{xy}\right) = \frac{1}{x} dx - 1 dy \rightsquigarrow$$

$$\int d\left(-\frac{1}{xy}\right) dx = \int \frac{1}{x} dx - \int 1 dy$$

$$\boxed{-\frac{1}{xy} = \ln|x| - y + C}$$

5) ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ.

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \quad (1)$$

με παράγοντα ολοκλήρωσης $I(x, y) = e^{\int p(x) dx}$

i) Να λυθεί η εξίσωση:

$$y' - 3y = 6$$

$$p(x) = -3 \quad \int p(x) dx = \int -3 dx = -3x$$

$$I(x, y) = e^{-3x}$$

$$(1) \Rightarrow e^{-3x} \cdot y' - 3e^{-3x} y = 6 \cdot e^{-3x} \rightarrow$$

$$\frac{d}{dx} (ye^{-3x}) = 6e^{-3x} \rightarrow \int \frac{d}{dx} (ye^{-3x}) dx = \int 6e^{-3x} dx$$

$$\rightarrow ye^{-3x} = -2e^{-3x} + C \Rightarrow \boxed{y = C \cdot e^{3x} - 2}$$

$$ii) y' + \left(\frac{4}{x}\right)y = x^4 \quad (1)$$

$$p(x) = \frac{4}{x} \quad \int \frac{4}{x} = 4 \ln|x| = \ln|x|^4 = \ln x^4$$

$$I(x, y) = e^{\int p(x) dx} = e^{\ln x^4} = x^4$$

$$(1) \Rightarrow x^4 y' + 4x^3 y = x^8 \rightarrow d(yx^4) = x^8$$

$$yx^4 = \frac{x^9}{9} + C \rightarrow y = \frac{C}{x^4} + \frac{1}{9}x^5$$

19

iii) Να λυθεί η εξίσωση:

$$y' + y = \sin x \quad (1) \quad p(x) = 1$$

$$I(x, y) = e^{\int 1 dx} = e^x$$

εφα ~~παρα~~ (1) $\cdot e^x \rightarrow e^x \cdot y' + e^x \cdot y = e^x \cdot \sin x$

$$\frac{d(e^x \cdot y)}{dx} = e^x \cdot \sin x$$

ΠΑΝΟΣ

4 Mar 2017

$$\int \frac{d(e^x \cdot y)}{dx} \cdot dx = \int e^x \cdot \sin x \cdot dx$$

$$e^x \cdot y = \int (e^x)' \cdot \sin x \, dx = e^x \cdot \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$= e^x \cdot \sin x - \int (e^x)' \cdot \cos x \, dx = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x +$$

$$\int e^x (\cos x)' \, dx = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x - \int e^x \sin x \, dx$$

εφα $e^x \cdot y = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$

$$y = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x + C \cdot e^{-x}$$

iv) No particular solution $\Delta \in \mathbb{R}$ $y' - 5y = 0$ (I)

$p(x) = -5$
 $I(x, y) = e^{\int -5 dx} = e^{-5x}$

(I) $\Rightarrow e^{-5x} y' - 5e^{-5x} y = 0 \rightarrow$

$(y \cdot e^{-5x})' = 0 \rightarrow y \cdot e^{-5x} = c \rightarrow \boxed{y = c e^{5x}}$

ΠΑΝΟΣ

4 Mar 2017

ΠΑΝΟΣ

4 Mar 2017

ΠΑΝΟΣ

4 Mar 2017

v) $y' - 7y = e^x$ (I) $p(x) = -7$

$I(x, y) = e^{\int -7 dx} = e^{-7x}$

(I) $\Rightarrow e^{-7x} y' - 7e^{-7x} y = e^{-6x} \rightarrow \frac{d(e^{-7x} y)}{dx} = e^{-6x}$

$e^{-7x} y = \int e^{-6x} dx \rightarrow e^{-7x} y = -\frac{1}{6} e^{-6x} + c \sim$

$y = -\frac{1}{6} e^x + c e^{7x}$ ✓

21

$$vi) y' + 6xy = 0 \quad (1)$$

$$y(\eta) = 5$$

ΠΑΝΟΣ

4 Mar 2017

ΠΑΝΟΣ

Mar 2017

ΠΑΝΟΣ

4 Mar 2017

Πύλη:

$$p(x) = 6x$$

$$I(x, y) = e^{\int 6x} = e^{3x^2}$$

$$(1) \Leftrightarrow y' \cdot e^{3x^2} + 6x \cdot e^{3x^2} y = 0 \rightarrow \frac{d(y \cdot e^{3x^2})}{dx} = 0$$

$$y \cdot e^{3x^2} = C \rightarrow y = C \cdot e^{-3x^2}$$

$$y(\eta) = 5 \quad \text{από} \quad 5 = C \cdot e^{-3\eta^2} \rightarrow C = 5 \cdot e^{3\eta^2}$$

$$\text{από} \quad y = 5 \cdot e^{3\eta^2} \cdot e^{-3x^2} = 5 \cdot e^{3\eta^2 - 3x^2}$$

ΠΑΝΟΣ

4 Mar 2017

Найти η д.е. $y' + 2xy = 2x^3$ (I) $\mu \in y(0) = 1$
 АИГ $p(x) = 2x$

$$I(x, y) = e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$$

$$(I) \Rightarrow e^{x^2} y' + 2x \cdot e^{x^2} y = 2x^3 \cdot e^{x^2} \rightarrow$$

$$\int \frac{d(e^{x^2} y)}{dx} dx = \int 2x^3 \cdot e^{x^2} dx = \int x^2 \cdot (2x e^{x^2})' dx$$

$$= x^2 e^{x^2} - \int (e^{x^2})' dx = x^2 e^{x^2} - e^{x^2} + C$$

$$e^{x^2} y = x^2 e^{x^2} - e^{x^2} + C$$

$$y(0) = 1$$

$$1 = -1 + C \Rightarrow C = 2$$

$$\text{д.е. } y = x^2 - 1 + 2 \cdot e^{-x^2} \quad \checkmark$$

6) Bernoulli

Μορφή $y' + f(x)y = g(x) \cdot y^\eta$ $\eta \neq 0, 1$

π.χ 2) $y' + xy = x \cdot y^2$ (I) $\eta = 2$

2) Αντικατάσταση $z = y^{1-\eta} = y^{1-2} = y^{-1} = \frac{1}{y}$

$y = \frac{1}{z} \rightarrow y' = -\frac{z'}{z^2}$

(I) $\rightarrow -\frac{z'}{z^2} + \frac{x}{z} = \frac{x}{z^2} \rightarrow z' - xz = -x$ γραμμική

$p(x) = -x$ $\int p(x) dx = \int -x dx = -\frac{x^2}{2}$

$I(x, y) = e^{\int p(x) dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}$

$e^{\frac{x^2}{2}} z' - x e^{\frac{x^2}{2}} z = -x e^{\frac{x^2}{2}} \rightarrow \frac{d(z \cdot e^{\frac{x^2}{2}})}{dx} = -x e^{\frac{x^2}{2}}$

~~$(z \cdot e^{\frac{x^2}{2}})'$~~ $\rightarrow \int \frac{d(z \cdot e^{\frac{x^2}{2}})}{dx} dx = - \int x e^{\frac{x^2}{2}} dx \rightarrow$

$z \cdot e^{\frac{x^2}{2}} = 1 + C_1 \rightarrow z = 1 + C e^{\frac{x^2}{2}}$

$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{1 + C e^{\frac{x^2}{2}}}$

24

ii) Να λυθεί η συνήθης διαφορική εξίσωση

$$(x^4 + y^4) dx - xy^3 dy = 0 \rightarrow$$

$$-xy^3 \frac{dy}{dx} + y^4 = -x^4 \rightarrow y' - \frac{y}{x} = x^3 \cdot y^{-3} \quad (I)$$

$$\eta = -3$$

Θέσω ~~$z = y^{-3}$~~

Θέσω $z = y^{1-\eta} = y^4$ οπότε $z' = 4y^3 \cdot y'$

παρ/τω (4ε y^3)

$$(I) \quad 4y^3 \cdot y' - \frac{4y^4}{x} = x^3 \Leftrightarrow$$

$$z' - \frac{4z}{x} = x^3 \rightarrow$$

$$z' - 4x^{-1}z = 4x^3 \quad p(x) = -4x^{-1}$$

$$\int p(x) dx = -4 \int x^{-1} dx = -4 \ln|x|$$

$$I(x, y) = e^{-4 \ln|x|} = e^{\ln \frac{1}{x^4}} = \frac{1}{x^4}$$

$$\frac{1}{x^4} \cdot z' - 4x^{-3}z = \frac{4}{x} \Leftrightarrow x^{-4}z' + (x^{-4})'z = \frac{4}{x}$$

$$\frac{d(x^{-4}z)}{dx} = \frac{4}{x} \rightarrow \int \frac{d(x^{-4}z)}{dx} = 4 \ln|x| + C$$

$$x^{-4} z = 4 \ln|x| + C \rightarrow z = 4x^4 \ln|x| + Cx^4$$

$$y^4 = 4x^4 \ln|x| + Cx^4$$

iii) Na η ν ∂ ϵ η Δ ϵ $y' - \frac{3}{x}y = x^4 y^{1/3}$ (Bernoulli)
 $\eta = \frac{1}{3}$ $P(x) = -\frac{3}{x}$

∂ ϵ ω $z = y^{1-1/3} = y^{2/3}$ ∂ ν ∂ ϵ $z' = \frac{2}{3} y^{-1/3} y'$

① ∂ ν ∂ ϵ ν $\frac{2}{3} y^{-1/3}$ ν Δ ϵ x ω

$$\frac{2}{3} y^{-1/3} y' - \frac{2}{3} y^{2/3} = \frac{2}{3} x^4 \rightarrow z' - \frac{2}{x} z = \frac{2}{3} x^4$$

$$P(x) = -\frac{2}{x} \quad I(x, y) = e^{\int -\frac{2}{x} dx} = e^{-2 \ln|x|} = e^{\ln|x|^{-2}} = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{1}{x^2} z' - \frac{2}{x^3} z = \frac{2}{3} x^2 \rightarrow d\left(\frac{1}{x^2} z\right) = \frac{2}{3} x^2$$

$$\frac{1}{x^2} z = \frac{2}{3} \int x^2 dx = \frac{2}{3} \frac{x^3}{3} + C \rightarrow \frac{z}{x^2} = \frac{2}{9} x^3 + C$$

$$z = \frac{2}{9} x^5 + Cx^2 \rightarrow y^{2/3} = \frac{2}{9} x^5 + Cx^2 \quad \checkmark$$

iv) Na η ν ∂ ϵ η Δ ϵ $y' + \frac{2}{x}y = -x^9 y^5$ (Bernoulli)
 $\eta = 5$

∂ ϵ ω $z = y^{1-\eta} = y^{1-5} = y^{-4}$ ∂ ν ∂ ϵ $z' = -4y^{-5} y'$
 ∂ ν ∂ ϵ ν $\frac{1}{y^5} = -4y^{-5}$

$$-4y^{-5} y' - \frac{8}{x} y^{-4} = -4x^9 \rightarrow z' - \frac{8}{x} z = -4x^9 \quad \text{②}$$

$$p(x) = -\frac{8}{x}$$

$$I(x, y) = e^{\int -\frac{8}{x} dx} = e^{-8 \ln|x|} = \frac{1}{x^8}$$

$$\textcircled{II} \quad \frac{1}{x^8} z' - \frac{8}{x^9} z = 4x \rightarrow \frac{d(z \cdot x^{-8})}{dx} = 4x \rightarrow$$

$$z \cdot x^{-8} = \int 4x = 4 \frac{x^2}{2} + C = 2x^2 + C \rightarrow$$

$$z = 2x^{10} + C, x^8 \rightarrow \frac{1}{y^4} = 2x^{10} + C, x^8$$

$$\text{ipws } y(-1) = 2 \quad \text{apx } \frac{1}{16} = 2 + C \rightarrow C = -\frac{31}{16}$$

$$\text{apx } y^4 = \frac{1}{2x^{10} - \frac{31}{16}x^8}$$

✓

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1) Γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις

Οι $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες *
αν και μόνο αν για κάθε γραμμικό συνδυασμό
 $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) = 0$ ($C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}$)

$$\Rightarrow C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$$

(* στο διάστημα $[a, b]$)

2) Θεώρημα Η γραμμική ομογενής διαφορική εξίσωση
$$L(y) = 0$$
 αόσως η

έχει πάντα η γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις
Αν $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ είναι η τέτοιες λύσεις
τότε η γενική λύση της $L(y) = 0$ είναι:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$$

($C_1, C_2, \dots, C_n$ αυθαίρετες σταθερές)

3) Ορισμός: Έστω οι συναρτήσεις: $\{z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x)\}$

οι οποίες έχουν μέχρι και $n-1$ τάξεις παραγώγων στο $[a, b]$

Η ορίζουσα $W(z_1, z_2, \dots, z_n) =$

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_n \\ z_1' & z_2' & \dots & z_n' \\ z_1'' & z_2'' & \dots & z_n'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{(n-1)} & z_2^{(n-1)} & \dots & z_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

λεχεται ορίζουσα
Wronski

ΛΕΜΜΑ. Αν $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ λύσεις της γραμμικής ομογενούς διαφορικής εξίσωσης:

$$L(y) = 0 \quad \text{ταξιδεύς } \eta$$

Τότε οι συναρτήσεις αυτές είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο $[a, b]$ αν και μόνο η ορίζουσα Wronski δεν είναι ταυτοτικά μηδέν στο διάστημα
 $(W \neq 0)$

π.χ. Στην εξίσωση $y'' + 4y = 0$ οι συναρτήσεις $y_1(x) = \sin 2x$ και $y_2(x) = \cos 2x$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες διότι

$$W(\sin 2x, \cos 2x) = \begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & -2\sin 2x \end{vmatrix} =$$

$$-2\sin^2 2x - 2\cos^2 2x = -2(\sin^2 2x + \cos^2 2x) = -2 \cdot 1 = -2 \neq 0$$

Άρα η γενική λύση αυτής της εξίσωσης είναι:

$$y(x) = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$$

5) Παράδειγμα. Έστω η γραμμική μη ομογενής δ.ε.

$$L(y) = f(x)$$

Εστω y_p μια περική λύση της $L(y) = f(x)$

και y_h μια γενική λύση της $L(y) = 0$

Τότε η γενική λύση της $L(y) = f(x)$ είναι

$$y = y_p + y_h$$

π.χ.

$$y'' + 4y = x$$

περική λύση αυτής είναι $y_p = \frac{1}{4}x$

Γενική λύση της $y'' + 4y = 0$ είναι

$$y_h = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$$

Άρα η γενική λύση της γραμμικής μη ομογενούς δ.ε. $y'' + 4y = x$ είναι

$$y = y_h + y_p = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + \frac{1}{4}x$$

Παραδειγματα 1) Λύνεται η διαφορική εξίσωση

i) γ.δ.ο οι e^x και e^{-x} είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$(e^x)'' - e^x = e^x - e^x = 0$$

$$(e^{-x})'' - e^{-x} = e^{-x} - e^{-x} = 0$$

ii) γ.δ.ο ότι οι λύσεις αυτές είναι γραμμικά ανεξαρτητές

Από ορίζοντα Wronski έχω

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

άρα οι συναρτήσεις είναι γραμμικά ανεξαρτητές

iii) Βρείτε τη γενική λύση της $y'' - y = 0$

$$y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x}$$

iv) Αν $y'' = \sin x$ είναι μια μερική λύση της εξίσωσης

τότε να βρείτε την γενική της λύση.

Λύση $y_p = -\sin x$ και η λύση της $y'' - y = 2\sin x$
 $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ λύση της $y'' - y = 0$

Άρα η γενική λύση της $y'' - y = 2\sin x$ είναι

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \sin x$$

2) Να βρείτε τη γενική λύση της $y'' + y = x^2$ αν μείν
 λύση της είναι $y = x^2 - 2$ και 2 λύσεις της
 $y'' + y = 0$ είναι $\sin x$ και $\cos x$
Λύση

• η $y = x^2 - 2$ είναι λύση της $y'' + y = x^2$ διότι
 $y'' + y = 2 + x^2 - 2 = x^2$

• $\sin x$ και $\cos x$ είναι λύσεις της $y'' + y = 0$ διότι
 $y'' + y = -\sin x + \sin x = 0$ και $y'' + y = -\cos x + \cos x = 0$
 Από ορίζημα Wronski έχω:

$$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -(\sin^2 x + \cos^2 x) = -1 \neq 0$$

Άρα οι συναρτήσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες και
 επομένως η γενική λύση της $y'' + y = 0$ είναι
 $y_h = C_1 \sin x + C_2 \cos x$

Άρα η γενική λύση της $y'' + y = x^2$ είναι

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x^2 - 2$$

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

$$y'' + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = 0 \quad \alpha_1, \alpha_0 \in \mathbb{R}$$

Χαρακτηριστική Εξίσωση της είναι:

$$\lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0 \quad (1)$$

Λύση της διαφορικής εξίσωσης:

1^η περίπτωση: Αν η (1) έχει 2 ρίζες $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ με $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

2^η περίπτωση: λ_1, λ_2 μιγαδικές συζυγείς

$$\lambda_1 = \alpha + ib \quad \lambda_2 = \alpha - ib$$

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos bx + C_2 e^{\alpha x} \sin bx$$

3^η περίπτωση: Αν $\lambda_1 = \lambda_2$

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x \cdot e^{\lambda_1 x}$$

Παραδείγματα

α) Να λυθεί η εξίσωση $y'' - 7y' = 0$

Λύση

Χαρακτηριστική εξίσωση

$$\lambda^2 - 7\lambda = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow \lambda = 0 \\ \searrow \lambda = 7 \end{matrix}$$

$$\text{λύση } y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{7x} = C_1 + C_2 e^{7x}$$

33

ii) Να λυθεί η εξίσωση

$$y'' + 4y' + 5y = 0$$

Λύση

Χαρακτηριστική εξίσωση

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_1 = -2 + i$$

$$\lambda_2 = -2 - i$$

Λύση είναι $y = C_1 \cdot e^{-2x} \cos x + C_2 \cdot e^{-2x} \sin x$

iii) Να λυθεί η εξίσωση

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

Λύση

Χαρακτηριστική εξίσωση

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -2$$

Λύση είναι $y = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 x \cdot e^{-2x}$

iv) Να λυθεί η εξίσωση: $y'' - 3y' + 4y = 0$

Λύση

η χαρακτηριστική εξίσωση της είναι $\lambda^2 - 3\lambda + 4 = 0$
 με $\lambda_1 = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}$ και $\lambda_2 = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$

Άρα η γενική λύση της είναι:

$$y = C_1 \cdot e^{\frac{3}{2}x} \cos \frac{\sqrt{7}}{2}x + C_2 \cdot e^{\frac{3}{2}x} \sin \frac{\sqrt{7}}{2}x$$

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
 η ΤΑΞΗ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Παραδείγματα.

i) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

χαρακτηριστική εξίσωση

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow \lambda_1 = 1 \\ \rightarrow \lambda_2 = 2 \\ \searrow \lambda_3 = 3 \end{matrix}$$

γύρω της είναι $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$

ii) $y^{(4)} - 9y'' + 20y = 0$

χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\lambda^4 - 9\lambda^2 + 20 = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow \lambda_1 = 2 \\ \rightarrow \lambda_2 = -2 \\ \searrow \lambda_3 = \sqrt{5} \\ \quad \lambda_4 = -\sqrt{5} \end{matrix}$$

γύρω της είναι $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{\sqrt{5}x} + C_4 e^{-\sqrt{5}x}$

iii) $y^{(4)} - 4y''' + 7y'' + 6y = 0$

χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 7\lambda^2 + 6 = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow \lambda_1 = 2 + i\sqrt{2} \\ \rightarrow \lambda_2 = 2 - i\sqrt{2} \\ \searrow \lambda_3 = i \\ \quad \lambda_4 = -i \end{matrix}$$

γύρω είναι:

$$y = C_1 e^{2x} \cos \sqrt{2}x + C_2 e^{2x} \sin \sqrt{2}x + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

Παραδείγματα 1) Να λυθεί η Δ.Ε.

$$\text{Λύση: } y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της είναι

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda \quad -2 \quad -1 \quad 2$$

$$\lambda = 1 \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

Η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{2x} + C_3 \cdot e^{-x}$$

2) Να λυθεί η Δ.Ε.

$$y^{(4)} - y = 0$$

Λύση

χαρακτηρ. εξίσωση $\lambda^4 - \lambda = 0 \leadsto (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = i, \lambda_4 = -i$$

$$\text{Γενική λύση } y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x} + C_3 \cdot \cos x + C_4 \cdot \sin x$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

Εισαγωγή:

Έστω $y(n)$ μια συνάρτηση που ορίζεται σ' ένα
αñoρο ακέραιων. Οι τιμές $y(n)$ μπορούν να
είναι πραγματικές ή μιγαδικές.
Μια ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΦΟΡΩΝ τάξης N είναι
μια σχέση μεταξύ των $y(n), y(n+1), \dots, y(n+N)$.
Μερικές απλές εξισώσεις διαφορών είναι οι:

$$y(n+1) - y(n) = 1 \quad \text{ή} \quad y(n) = n + C$$

$$y(n+1) - y(n) = n \quad \Rightarrow \quad y(n) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$y(n+1) - (n+1)y(n) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(n) = n!$$

$$y(n+1) - 2\cos x \cdot y(n) + y(n) = 0 \quad \text{ή} \quad y(n) = \cos^n x$$

(12 τάξης σχέσ)

Γραμμική μη ομογενής εξίσωση διαφορών τάξης N

$$y(n+N) + \alpha_{N-1} y(n+N-1) + \dots + \alpha_0 y(n) = b(n) \quad (I)$$

όπου τα α_i , b μπορεί να είναι συναρτήσεις του n αλλά όχι του y .

ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΤΑΞΗΣ N

$$y(n+N) + \alpha_{N-1} y(n+N-1) + \dots + \alpha_0 y(n) = 0$$

ΠΟΙΟΙ ΛΥΝΕΤΕ $\rightarrow$

Παράδειγμα 1 Να βρεθεί η γενική λύση της
Εξίσωσης διαφορών

$$y(n+3) - 2y(n+2) - y(n+1) + 2y(n) = 0$$

Τάξης 3

Χαρακτηριστική της Εξίσωσης

$$b^3 - 2b^2 - b + 2 = 0 \begin{cases} \rightarrow b_1 = 1 \\ \rightarrow b_2 = -1 \\ \rightarrow b_3 = 2 \end{cases}$$

Γενική λύση

$$y(n) = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot (-1)^n + C_3 \cdot 2^n = C_1 + C_2(-1)^n + C_3 \cdot 2^n$$

Παράδειγμα 2 Να λυθεί το πρόβλημα, αρχικών
τιμών

$$y(n+3) - 2y(n+2) - y(n+1) + 2y(n) = 0$$

$$\text{με } y(0)=0 \quad y(1)=1 \quad y(2)=1$$

Λύση

Χαρακτηριστική Εξίσωση

$$b^3 - 2b^2 - b + 2 = 0 \rightarrow b^2(b-2) - (b-2) = 0$$

$$(b-2)(b^2-1) = 0 \begin{cases} \rightarrow b_1 = 2 \\ \rightarrow b_2 = 1 \\ \rightarrow b_3 = -1 \end{cases}$$

$$\text{λύση } y(n) = C_1 + (-1)^n C_2 + 2^n C_3$$

$$y(0) = C_1 + C_2 + C_3 = 0 \quad (1)$$

$$y(1) = C_1 - C_2 + 2C_3 = 1 \quad (2)$$

$$y(2) = C_1 + C_2 + 4C_3 = 1 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} (1)+(2) \quad 2C_1 + 3C_3 &= 1 \\ (2)+(3) \quad 2C_1 + 6C_3 &= 2 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} 2C_1 &= -3C_3 + 1 \\ 1 - 3C_3 + 6C_3 &= 2 \rightarrow 3C_3 = 1 \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \boxed{C_3 = \frac{1}{3}} \quad 2C_1 = -1 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = 0}$$

$$(1) \Rightarrow 0 + C_2 + \frac{1}{3} = 0 \rightarrow C_2 = -\frac{1}{3}$$

$$\text{αρα } \boxed{y(\eta) = -\frac{1}{3}(-1)^\eta + \frac{1}{3} \cdot 2^\eta}$$

Πρόβλημα 3 Να λυθεί η εξίσωση διαφορών

$$y(\eta+2) - 2y(\eta+1) - 2y(\eta) = 0$$

Λύση ~~λύνω~~ 2^η τάξη ομογενής

χωρίς τυράγδα εξίσωση

$$b^2 - 2b + 2 = 0 \quad \begin{aligned} \rightarrow b_1 &= 1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ \rightarrow b_2 &= 1-i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

Οι 2 πραγματικές ρίζες που αντιστοιχούν στην πραγματική ρίζα είναι:

$$\sqrt{2}^\eta \cos \frac{\pi \eta}{4}, \quad \sqrt{2}^\eta \sin \frac{\pi \eta}{4}$$

Άρα η γενική λύση είναι:

$$\boxed{y(\eta) = \sqrt{2}^\eta \left[C_1 \cos \frac{\pi \eta}{4} + C_2 \sin \frac{\pi \eta}{4} \right]}$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.1 (Σελ. 142)

1. Αληθινή ρίζα b | λύση: $y = C_1 \cdot b^n$
 2. Αληθινή μιγαδική ρίζα $b = x + iy$
 $= z(\cos \theta + i \sin \theta)$ | λύση: $y(n) = z^n (C_1 \cos n\theta + i C_2 \sin n\theta)$
 3. Πραγματική ρίζα b πολλαπλότητας k | λύση: $y(n) = b^n [C_1 \cdot n^{k-1} + C_2 \cdot n^{k-2} + \dots + C_k]$
 4. Μιγαδική ρίζα $b = x + iy = z(\cos \theta + i \sin \theta)$ πολλαπλότητας k | λύση
- $$y(n) = z^n \left\{ [C_1 \cdot n^{k-1} + C_2 \cdot n^{k-2} + \dots + C_k] \cos n\theta + [C_{k+1} \cdot n^{k-1} + C_{k+2} \cdot n^{k-2} + \dots + C_{2k}] \sin n\theta \right\}$$

Παραδειγμα Να λυθεί η εξίσωση διαφορών

$$y(n+3) - 5y(n+2) + 8y(n+1) - 4y(n) = 0$$

Λύση Ομογενής 3^η τάξης

Χαρακτηριστική εξίσωση

$$b^3 - 5b^2 + 8b - 4 = 0 \quad \begin{cases} b_1 = 1 \\ b_2 = 2 \text{ (διπλή ρίζα)} \end{cases}$$

η γενική λύση είναι

$$y(n) = C_1 \cdot 1^n + 2^n (C_2 \cdot n + C_3) = C_1 + 2^n (C_2 n + C_3)$$

Να λυθεί η εξίσωση διαφορών
 $x_{n+2} + 9x_n = 0$

Λύση

Ομογενής γραμμική 2^{ης} τάξης με σταθ. συντελεστές
 χαρακτ. εξίσωση:
 $b^2 + 9 = 0 \rightarrow b_1 = 3i$
 $\rightarrow b_2 = -3i$

γύρω $x(n) = 3^n \left(C_1 \cos \frac{n\pi}{2} + C_2 \sin \frac{n\pi}{2} \right)$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 2 συναρτήσεις $x_1(n)$, $x_2(n)$ είναι γραμμικά
 ανεξάρτητες αν για κάθε γραμμικό συνδυασμό
 $\lambda_1 x_1(n) + \lambda_2 x_2(n) = 0 \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})$
 έχω $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 Οι ακολουθίες $x_1(n)$, $x_2(n)$, ..., $x_k(n)$
 είναι γραμ. ανεξάρτητες αν $\forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$
 με $\lambda_1 x_1(n) + \lambda_2 x_2(n) + \dots + \lambda_k x_k(n) = 0 \rightarrow$
 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 Έστω οι πραγματικές ακολουθίες
 $x_1(n)$, $x_2(n)$. Η ορίζουσα

$$G(x_1, x_2)(n) = \begin{vmatrix} x_1(n) & x_2(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) \end{vmatrix} \text{ έστω}$$

ορίζουσα Casoratian

41

ΟΡΙΣΜΟΣ 4. Έστω οι πραγματικές συναρτήσεις
 $x_1(\eta), x_2(\eta), \dots, x_k(\eta)$. Η ορίζουσα

$$C(x_1, x_2, \dots, x_k)(\eta) = \begin{vmatrix} x_1(\eta) & x_2(\eta) & \dots & x_k(\eta) \\ x_1(\eta+1) & x_2(\eta+1) & \dots & x_k(\eta+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1(\eta+k-1) & x_2(\eta+k-1) & \dots & x_k(\eta+k-1) \end{vmatrix}$$

λέγεται ορίζουσα Casoratian

$$x_{\eta+k} + b_{k-1}x_{\eta+k-1} + \dots + b_1x_{\eta+1} + b_0x_{\eta} = 0 \quad (I)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (SOS)

Αν $x_1, x_2, \dots, x_k$ συναρτήσεις είναι γύρες
 της ομογενούς εξίσωσης (I) και η Casoratian
 ορίζουσα αυτών

$$C(x_1, x_2, \dots, x_k)(\eta) \neq 0$$

τότε αυτές οι συναρτήσεις είναι γραμμικά
 ανεξάρτητες και αποτελούν θεμελιώδες σύστημα
 των γύρων της ομογενούς εξίσωσης (I)
 τότε η γενική λύση της (I) είναι:

$$x_{\eta} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_k x_k$$

$$\text{δηλ. } x_{\eta} = c_1 x_1(\eta) + c_2 x_2(\eta) + \dots + c_k x_k(\eta)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Δίνεται η επίλυση των διαφορών
 $x_{n+2} + 4x_n = 0$ (I)

i) v.d.o $x_1(n) = 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ και $x_2(n) = 2^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$
 είναι λύσεις της (I)

• ~~160~~ 160

$$\bullet x_{n+2} + 4x_n = 2^{n+2} \cos\left(\frac{(n+2)\pi}{2}\right) + 4 \cdot 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) =$$

$$= 2^{n+2} \left[\cos\left(n + \frac{n\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] =$$

$$= 2^{n+2} \left[-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] = 2^{n+2} \cdot 0 = 0$$

$$\bullet x_{n+2} + 4x_n = 2^{n+2} \sin\left(\frac{(n+2)\pi}{2}\right) + 4 \cdot 2^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) =$$

$$= 2^{n+2} \left[\sin\left(n + \frac{n\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] =$$

$$= 2^{n+2} \left[-\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] = 2^{n+2} \cdot 0 = 0$$

ii) Να δείξετε ότι $x_1(n)$, $x_2(n)$ είναι γραμμικά
 ανεξάρτητα.

η αντίστοιχη Casoratian είναι

$$C(x_1, x_2)(n) = \begin{vmatrix} 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) & 2^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ 2^{n+1} \cos\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right) & 2^{n+1} \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right) \end{vmatrix}$$

$$= 2^{2n+1} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] =$$

$$= 2^{2n+1} \left[\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2} - \frac{n\pi}{2}\right) \right] = 2^{2n+1} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] = 2^{2n+1} \neq 0$$

43

iii) Να βρείτε την γενική λύση της (I)
Λύση

$$X_n = C_1 \cdot 2^n \cos \frac{n\pi}{2} + C_2 \cdot 2^n \sin \frac{n\pi}{2} \quad n \geq 0$$

iv) Να υπολογιστούν τα C_1, C_2 δέ
βασικές με τα X_0, X_1

$$X_0 = C_1 \cdot 2^0 \cos 0 + C_2 \cdot 2^0 \sin 0 = C_1$$

$$C_1 = X_0$$

$$X_1 = X_0 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{2} + C_2 \cdot 2 \cdot \sin \frac{\pi}{2}$$

$$X_1 = 2C_2 \quad \rightarrow \quad C_2 = \frac{X_1}{2}$$

επομένως

$$X_n = X_0 \cdot 2^n \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{X_1}{2} \cdot 2^n \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$= X_0 \cdot 2^n \cos \frac{n\pi}{2} + X_1 \cdot 2^{n-1} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$n \geq 0$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να επιλυθεί το I.A.T.

$$2x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0 \quad n \geq 0 \quad x_0 = 0, x_1 = 1$$

Λύση γραμμική ομογενής 2^η τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Χαρακτηριστική εξίσωση

$$2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow \lambda_1 = -\frac{1}{2} \\ \searrow \lambda_2 = 1 \end{matrix}$$

λύσεις $x_1(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad x_2(n) = 1^n = 1$

Γενική λύση γοιμόν είναι:

$$x_n = C_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n + C_2 \quad n \geq 0$$

$$\left. \begin{matrix} x_0 = C_1 + C_2 = 0 \\ x_1 = -\frac{C_1}{2} + C_2 = 1 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} C_1 + C_2 = 0 \\ -C_1 + 2C_2 = 2 \end{matrix}$$

$$\underline{3C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = \frac{2}{3}}$$

αρα $C_1 = -\frac{2}{3}$

Επομένως

$$x_n = -\frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3} \quad n \geq 0$$

45

2) Να επιλυθεί το Π.Α.Τ $x_0=1, x_1=7$
 $x_{n+2}-6x_{n+1}+25x_n=0 \quad y(0)=1, y'(0)=7$

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2 - 6\lambda + 25 = 0 \quad \begin{array}{l} \nearrow \lambda_1 = 3 + 4i \\ \searrow \lambda_2 = 3 - 4i \end{array}$$

$$r=5 \quad \cos \theta = \frac{3}{5} \quad \sin \theta = \frac{4}{5}$$

$$~~x_n = C_1 5^n~~ \quad x_n = 5^n (C_1 \cos n\theta + C_2 \sin n\theta)$$

$$x_0 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = C_1 = 1$$

$$x_1 = 5 \left(C_1 \cdot \frac{3}{5} + C_2 \frac{4}{5} \right) = 7$$

$$3C_1 + 4C_2 = 7$$

$$C_1 = 1 \quad 3 + 4C_2 = 7 \leadsto C_2 = 1$$

οπότε $x_n = 5^n (\cos n\theta + \sin n\theta) \quad n \geq 0$

3) Να επιλυθεί το Π.Α.Τ.

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0 \quad x_0 = 2 \quad x_1 = 6$$

Λύση Πρόσεται Εξίσωση διαφόρων 2^{ης} τάξης με πραγματικούς συντελεστές

Χαρακτηριστική Εξίσωση:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

Γενική λύση της είναι

$$x_n = 2^n [C_1 n + C_2] = 2^n C_1 n + 2^n C_2 \quad n \geq 0$$

$$x_0 = C_2 = 2$$

$$x_1 = 2C_1 + 2C_2 = 6 \rightarrow 2C_1 = 2 \rightarrow C_1 = 1$$

οπότε $y(x) = 2^n \cdot n + 2^n - 2^n (n+2) \quad n \geq 0$

4) Να επιλυθεί το Π.Α.Τ.

$$x_{n+3} - 2x_{n+2} - x_{n+1} + 2x_n = 0 \quad x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$$

Λύση

Εξίσωση διαφόρων γραμμικής ομογενούς 3^{ης} τάξης με πραγματικούς συντελεστές.

Χαρακτηριστική Εξίσωση:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda^2(\lambda - 2) - (\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 - 1) = 0 \rightarrow \lambda = 2, \lambda = 1, \lambda = -1$$

$$x_n = C_1(-1)^n + C_2 \cdot 1^n + C_3 \cdot 2^n = C_1(-1)^n + C_2 + C_3 \cdot 2^n$$

→

$$x_0 = c_1 + c_2 + c_3 = 0 \quad (1)$$

$$x_1 = -c_1 + c_2 + 2c_3 = 1 \quad (2)$$

$$x_2 = c_1 + c_2 + 4c_3 = 2 \quad (3)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2c_2 + 3c_3 = 1$$

$$(2) + (3) \Rightarrow 2c_2 + 6c_3 = 3$$

ΠΑΝΟΣ

4 Mar 2017

$$\Rightarrow 2c_2 = 1 - 3c_3 \Rightarrow 2c_2 = 1 - 2 = -1 \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{2}$$

$$1 - 3c_3 + 6c_3 = 3 \Rightarrow 3c_3 = 2 \Rightarrow c_3 = \frac{2}{3}$$

$$c_1 = -c_2 - c_3 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$$

$$\text{όρα } x_\eta = -\frac{1}{6}(-1)^\eta - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot 2^\eta \quad \eta \geq 0$$

4) Να επιλυθεί η εξίσωση:

$$x_{\eta+4} + 2x_{\eta+3} + 2x_{\eta+2} + 2x_{\eta+1} + x_\eta = 0$$

η λύση Χαρακτ. εξίσωση:

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$\lambda_3 = i$$

$$\lambda_4 = -i$$

Δίνονται είναι:

$$x_\eta = c_1(-1)^\eta + c_2 \cdot \eta(-1)^\eta + c_3 \cos \frac{\eta\pi}{2} + c_4 \sin \frac{\eta\pi}{2} \quad \eta \geq 0$$

Η μν ομογενής εἰσώδη διαφορὰν

$$y(n+N) + \alpha_{N-1}y(n+N-1) + \dots + \alpha_0y(n) = b(n) \quad (I)$$

$f(n)$ γύνη τῆς ἀντίστ. ομογενούς
 $\psi(n)$ μία συγκεκριμένη γύνη τῆς (I)

Τότε γενικὴ γύνη εἶναι:

$$y(n) = f(n) + \psi(n)$$

Παράδειγμα Να βρεθεῖ ἡ γενικὴ γύνη τῆς εἰσώδης-
 $y(n+2) - 6y(n+1) + 8y(n) = 3n^2 + 2n - 5 \cdot 3^n$

Λύση

Αντίστοιχη ομογενὴς εἶναι:

$$y(n+2) - 6y(n+1) + 8y(n) = 0$$

ἀντίστ.

Χαρακτηριστικὴ εἰσώδη:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 2$$

$$\rightarrow \lambda_2 = 4$$

ἀρα γύνη τῆς εἶναι:

$$f(n) = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 4^n$$

Τώρα ἡ γύνη $y(n)$ εἶναι τῆς μορφῆς

$$\psi(n) = A_1 n^2 + A_2 n + A_3 + A_4 \cdot 3^n$$

$$\begin{aligned} y(n+2) - 6y(n+1) + 8y(n) &= A_1(n+2)^2 + A_2(n+2) + A_3 + A_4 \cdot 3^{n+2} \\ &\quad - 6[A_1(n+1)^2 + A_2(n+1) + A_3 + A_4 \cdot 3^{n+1}] \\ &\quad + 8[A_1 n^2 + A_2 n + A_3 + A_4 \cdot 3^n] = \\ &= A_1 n^2 + 4A_1 n + 4A_1 + A_2 n + 2A_2 + A_3 + 9A_4 \cdot 3^n \\ &\quad - 6A_1 n^2 - 12A_1 n - 6A_1 - 6A_2 n - 6A_2 - 6A_3 - 6A_4 \cdot 3^n \\ &\quad + 8A_1 n^2 + 8A_2 n + 8A_3 + 8A_4 \cdot 3^n \end{aligned}$$

$$= 3A_1 n^2 + (3A_2 - 8A_1)n + (-2A_1 - 4A_2 + 3A_3) - A_4 \cdot 3^n = 3n^2 + 2n - 5 \cdot 3^n$$

ἀρα

49

$$3A_1 = 3 \rightarrow A_1 = 1$$

$$3A_2 - 8A_1 = 2 \rightarrow 3A_2 = 10 \rightarrow A_2 = \frac{10}{3}$$

$$3A_3 - 4A_2 - 2A_1 = 0$$

$$3A_3 = \frac{40}{3} + 2 = \frac{46}{3} \rightarrow A_3 = \frac{46}{9}$$

$$A_4 = 5$$

$$\text{οπρ} \quad \boxed{\psi(\eta) = \eta^2 + \frac{10}{3}\eta + \frac{46}{9} + 5 \cdot 3^\eta}$$

$$\text{οπρ} \quad y(\eta) = C_1 \cdot 2^\eta + C_2 \cdot 4^\eta + \eta^2 + \frac{10}{3}\eta + \frac{46}{9} + 5 \cdot 3^\eta \quad \eta \geq 0$$

2) Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης των διαφορών.

$$y(\eta+2) - 5y(\eta+1) + 6y(\eta) = \eta^2 \quad \textcircled{I}$$

Λύση

Η αντίστοιχη ομογενής είναι

$$y(\eta+2) - 5y(\eta+1) + 6y(\eta) = 0$$

με χαρακτηριστικό εξίσωση

$$1^2 - 5\lambda + 6 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 2$$

$$\rightarrow \lambda_2 = 3$$

$$\text{οπρ} \quad \text{με λύση} \quad \boxed{y_\eta = C_1 \cdot 2^\eta + C_2 \cdot 3^\eta}$$

Τώρα η γενική λύση της $\textcircled{I}$ είναι

$$\psi(\eta) = A_1 \eta^2 + A_2 \eta + A_3$$

οπότε έχω

$$\begin{aligned} y(\eta+2) - 5y(\eta+1) + 6y(\eta) &= A_1(\eta+2)^2 + A_2(\eta+2) + A_3 \\ &\quad - 5[A_1(\eta+1)^2 + A_2(\eta+1) + A_3] \\ &\quad + 6[A_1\eta^2 + A_2\eta + A_3] \end{aligned}$$

$$= \underline{A_1 \eta^2} + \underline{\cancel{A_1} \eta} + \underline{4A_1} + \underline{A_2 \eta} + \underline{2A_2} + \underline{A_3}$$

$$- \underline{5A_1 \eta^2} - \underline{10A_1 \eta} - \underline{5A_1} - \underline{5A_2 \eta} - \underline{5A_2} - \underline{5A_3}$$

$$+ \underline{6A_1 \eta^2} + \underline{6A_2 \eta} + \underline{6A_2} =$$

$$= 2A_1 \eta^2 + (-6A_1 + 2A_2) \eta + 3A_2 - 4A_3 = \eta^2$$

$$\text{ppa } 2A_1 = 1 \rightarrow A_1 = \frac{1}{2}$$

$$-6A_1 + 2A_2 = 0 \rightarrow -3 + 2A_2 = 0 \rightarrow A_2 = \frac{3}{2}$$

$$3A_2 - 4A_3 = 0 \rightarrow \frac{9}{2} - 4A_3 = 0 \rightarrow A_3 = \frac{9}{8}$$

$$\text{ppa } \boxed{y(\eta) = \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{3}{2} \eta + \frac{9}{8}}$$

$$\text{ppa } y(\eta) = C_1 \cdot 2^\eta + C_2 \cdot 3^\eta + \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{3}{2} \eta + \frac{9}{8} \quad \eta \geq 0$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1) ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ Δ.Ε.

α) Μέθοδος απαγωγής

Παράδειγμα. Να λυθεί το σύστημα των Δ.Ε.

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) + t^2 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2'(t) = -2x_1(t) + 3x_2(t) - t & (2) \end{cases}$$

Πρώτη Παραγωγίζουμε και τα 2 μέλη της (2)
και έχω:

$$x_2''(t) = -2x_1'(t) + 3x_2'(t) - 1 \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$$

$$x_2''(t) = -2x_2(t) + 2t^2 + 3x_2'(t) - 1 \rightarrow$$

$$x_2''(t) - 3x_2'(t) + 2x_2(t) = 2t^2 - 1 \quad (3)$$

παίρνω την αντίστοιχη ομογενή

$$x_2''(t) - 3x_2'(t) + 2x_2(t) = 0$$

Χαρακτηριστική εξίσωση της

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1$$

$$\rightarrow \lambda_2 = 2$$

Άρα η λύση της είναι $x_{op}(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$

$$\eta \quad x_{\text{ερ.}} = A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3 = 2t^2 - 1$$

$$\text{Αντικαθιστώντας}$$

$$-2A_1 - 6A_1 t + A_2 + 2A_1 t^2 + 2A_2 t + 2A_3 t^2 = 2t^2 - 1$$

52

$$4A_1 t^2 + (2A_2 - 6A_1)t + 2A_1 + A_2 + 2A_3 = 2t^2 - 1$$

$$4A_1 = 2 \rightarrow A_1 = \frac{1}{2}$$

$$2A_2 = 6A_1 = \frac{6}{2} = 3 \rightarrow A_2 = \frac{3}{2}$$

$$2A_1 + A_2 + 2A_3 = -1 \rightarrow 1 + \frac{3}{2} + 2A_3 = -1$$

$$2A_3 = -\frac{5}{2} \rightarrow A_3 = -\frac{5}{4}$$

Αρα η γενική λύση του συστήματος είναι

$$X_1(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{7}{4}$$

$$X_2(t) = X_1'(t) - t^2 - C_1 e^t - 2C_2 e^{2t} + t - t^2 + \frac{3}{2}$$

Παράδειγμα 2 Να λύσει το σύστημα Δ.Ε.

$$y_1' = 3y_1 + y_2 \quad (1)$$

$$y_2' = y_1 + 3y_2 \quad (2)$$

Λύση

$$(1) \Rightarrow y_2 = y_1' - 3y_1$$

$$(2) (y_1' - 3y_1)' = y_1 + 3(y_1' - 3y_1) \sim y_1'' - 3y_1' = y_1 + 3y_1' - 9y_1$$

$$y_1'' - 6y_1' + 8y_1 = 0$$

Χαρακτ. Εξίσωση

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \rightarrow \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix}$$

Αρα γενική τ. $y_1(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{2x}$

$$\begin{aligned} \text{α} \quad y_2(x) &= y_1' - 3y_1 = 4C_1 e^{4x} + 2C_2 e^{2x} - 3C_1 e^{4x} - 3C_2 e^{2x} \\ &= C_1 e^{4x} - C_2 e^{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{2x} \\ y_2(x) = C_1 e^{4x} - C_2 e^{2x} \end{cases}$$

Ταρά γν εχων $\mathcal{T} \cdot A \cdot T$ πε $y_1(0) = A$ κα $y_2(0) = B$
 τότε

$$\begin{aligned} y_1(0) &= C_1 + C_2 = A \quad (+) \\ y_2(0) &= C_1 - C_2 = B \quad (+) \end{aligned}$$

$$C_1 = \frac{A+B}{2} \quad C_2 = A - \frac{A+B}{2} = \frac{A-B}{2}$$

Επομένως $y_1(x) = \frac{A+B}{2} e^{4x} + \frac{A-B}{2} e^{2x}$

$$y_2(x) = \frac{A+B}{2} e^{4x} - \frac{A-B}{2} e^{2x}$$

54

8) Μέθοδος των τελεστών

$$\begin{cases} x' = -2x + y + t^2 & (1) \\ y' = x - 2y & (2) \end{cases}$$

Πόση

Θεωρούμε τον τελεστή της παραγράφου
 $(D \cdot x = x' \quad D \cdot y = y')$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} (D+2)x - y &= t^2 \\ \cancel{(D+2)}x + (D+2)y &= 0 \end{aligned}$$

ορίζε

$$\begin{vmatrix} D+2 & -1 \\ -1 & D+2 \end{vmatrix} = D^2 + 4D + 3$$

$$\begin{vmatrix} t^2 & -1 \\ 0 & D+2 \end{vmatrix} = Dt^2 + 2t^2 = 2t + 2t^2$$

$$\begin{vmatrix} D+2 & t^2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = t^2$$

Αρα $x = \frac{2t^2 + 2t}{D^2 + 4D + 3} \Rightarrow x'' + 4x' + 3x = 2t^2 + 2t \quad (3)$

και $y = \frac{t^2}{D^2 + 4D + 3} \Rightarrow y'' + 4y' + 3y = t^2 \quad (4)$

#, χαρακτηριζόμενη εξίσωση και των (3), (4)
 Επειδή $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -3$
 $\lambda_2 = -1$

όρα η γύρα της ομογενούς της δεύτερης εξίσωσης είναι:

$$y_{\text{ομογ}} = C_1 \cdot e^{-3t} + C_2 \cdot e^{-t}$$

αναζητούμε γενική γύρα της κορεψής

$$y = At^2 + Bt + C$$

Παράδειγμα 2.

Να λυθεί το σύστημα:

$$y' + z' - z = 2t + 1 \quad (I)$$

$$2y' + 2z' + z = t$$

Λύση. Προσophe το σύστημα σε όρους τελεστή D

$$y' = D \cdot y \quad z' = D \cdot z$$

$$\begin{cases} Dy + Dz - z = 2t + 1 \\ 2Dy + 2Dz + z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Dy + (D-1)z = 2t + 1 \\ 2Dy + (2D+1)z = t \end{cases}$$

Από παραπάνω Γράφει

$$\begin{vmatrix} D & D-1 \\ 2D & 2D+1 \end{vmatrix} = 2D^2 + D - 2D^2 - 2D = -3D$$

$$\begin{vmatrix} 2t+1 & D-1 \\ t & 2D+1 \end{vmatrix} = \underline{4tD} + \underline{2t+2D+1} - \underline{t \cdot D} + \underline{t} = 3tD + 2D + 3t + 1$$

$$\begin{vmatrix} D & 2t+1 \\ 2D & t \end{vmatrix} = \underline{t \cdot D} - \underline{4tD} - \underline{2D} = -3tD - 2D$$

$$\text{οπότε } 3Dy = 3tD + 2D + 3t + 1 \quad 3Dz = -3tD - 2D$$

$$Dt = t' = 1 \quad \text{και } D = D \cdot 1 = (1)' = 0$$

$$\text{από } 3y' = 4 + 3t \quad 3z' = -3$$

$$\text{από } y' = t + \frac{4}{3} \quad z' = -1$$

$$\text{από } y = \int \left(t + \frac{4}{3} \right) dt = \frac{t^2}{2} + \frac{4}{3}t + C_1 \quad z = -t + C_2$$

57

και $y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{4}{3}t + 4$

$$z = -t + C_2$$

Τις αναγωγές σου και στο βύθισμα:

$$\left. \begin{array}{l} y' + z' - z = 2t + 1 \\ 2y' + 2z' + z = t \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} t + \frac{4}{3} - 1 + t - C_2 = 2t + 1 \\ 2t + \frac{8}{3} - 2 - t + C_2 = t \end{array} \right\}$$

$$-C_2 = 2 - \frac{4}{3} \leadsto C_2 = -2 + \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$C_2 = 2 - \frac{8}{3} \leadsto C_2 = -\frac{2}{3}$$

και $\boxed{\begin{array}{l} y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{4}{3}t + 4 \\ z = -t - \frac{2}{3} \end{array}}$

Παράδειγμα 3 Να γυράς το βύθισμα:

$$-3y' + 2z' + y - 5z = e^t \quad (α)$$

$$y' - z' + z = 3t$$

Λύση Γράφουμε το (α) με όρους τελεστή D

$$y' = D \cdot y \quad z' = D \cdot z$$

$$-3Dy + 2Dz + y - 5z = e^t \quad \Leftrightarrow (3D+1)y + (2D-5)z = e^t$$

$$D \cdot y - D \cdot z + z = 3t \quad \Leftrightarrow D \cdot y + (1-D)z = 3t$$

υπολογίζω τις ορίζουσες

$$\begin{vmatrix} -3D+1 & 2D-5 \\ D & 1-D \end{vmatrix} = -3D+3D^2+1-D-2D^2+5D = D^2+D+1$$

$$\begin{vmatrix} e^t & 2D-5 \\ 3t & 1-D \end{vmatrix} = e^t - e^t D - 6tD + 15t = 15t - 6$$

διδότ $D \cdot e^t = (e^t)' = e^t$ και $t \cdot D = t' = 1$

$$\begin{vmatrix} -3DH & e^t \\ D & 3t \end{vmatrix} = -9Dt + 3t - D \cdot e^t = -9 + 3t - e^t$$

$$\text{αφά } \left. \begin{aligned} (D^2 + D + 1) \cdot y &= 15t - 6 \\ (D^2 + D + 1) \cdot z &= 3t - 9 - e^t \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$y'' + y' + y = 15t - 6 \quad (I)$$

$$z'' + z' + z = 3t - 9 - e^t \quad (II)$$

Γραμμικές και οι δύο 2^η τάξης ~~με σταθερά~~
~~χαρακτηριστική~~ εξίσωση.

$$\lambda^2 + \lambda + 1$$

Οι αντίστοιχες οροφάνειες έχουν την ίδια
 χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

$$\rightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\rightarrow \lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ΠΑΝΟΣ

4 Mar 2017

4 Mar 2017

ΠΑΝΟΣ

$$y_h = e^{-\frac{t}{2}} \left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right]$$

$$z_h = e^{-\frac{t}{2}} \left[C_3 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_4 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right]$$

Τώρα για την ειδική λύση της (I) θα είναι

$$y_p = C_5 t + C_6 \quad \text{οπότε έχω}$$

$$(I) \quad y'' + y' + y = C_5 + C_5 t + C_6 = 15t - 6 \rightarrow C_5 = 15 \text{ και } C_6 = -21$$

$$\text{δηλ } \boxed{y_p = 15t - 21}$$

50)

Για την ειδική γδω της $\textcircled{4}$ είναι

$$z_p = C_7 + C_8 t + C_9 \cdot e^t$$

αφ' α έχω

$$z'' + z' + z = \underline{C_9} \cdot e^t + C_8 + \underline{C_9} \cdot e^t + \underline{C_7} + \underline{C_8 t} + \underline{C_9} \cdot e^t$$

$$= 3C_9 \cdot e^t + C_8 t + C_7 + C_8 = -e^t + 3t - 9$$

$$\text{αφ' α } 3C_9 = -1 \sim C_9 = -\frac{1}{3}$$

$$C_8 = 3$$

$$\text{και } C_7 = -9 - 3$$

$$C_7 = -12$$

$$\text{αφ' α } \boxed{z_p = -12 + 3t - \frac{1}{3} e^t}$$

~APA

$$y(t) = y_p + y_h = 15t - 21 + e^{-\frac{t}{2}} \left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right]$$

$$z(t) = z_p + z_h = -12 + 3t - \frac{1}{3} e^t + e^{-\frac{t}{2}} \left[C_3 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_4 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right]$$

Από τις τέσσερις μεταβλητές C_1, C_2, C_3, C_4 μόνο 2 είναι ανεξαρτήτες. Επαγόμενος γινόμεν τις γδως στις εξισώσεις βρίσκω

$$C_3 = \frac{1}{2} C_1 + \frac{\sqrt{3}}{6} C_2$$

και

$$C_4 = \frac{1}{2} C_2 - \frac{\sqrt{3}}{6} C_1$$

//

Παράδειγμα 4. (Θέμα εξετάσεων 1/2016)

Επιλύσατε το σύστημα:

$$x'(t) - 3x(t) - 6y(t) = t^2 \quad (1)$$

$$y'(t) + x'(t) - 3y(t) = e^t$$

Λύση. Γράφουμε το (2) με όρους τελεστή D

$$x = D \cdot x \quad y' = D \cdot y \quad \text{οπότε έχουμε:}$$

$$D \cdot x - 3x - 6y = t^2 \quad \rightarrow (D-3)x - 6y = t^2$$

$$D \cdot y + D \cdot x - 3y = e^t \quad \rightarrow Dx + (D-3)y = e^t$$

υπολογίζω τις ορίζουσες

$$\begin{vmatrix} D-3 & -6 \\ D & D-3 \end{vmatrix} = (D-3)^2 + 6D = D^2 - 6D + 9 + 6D = D^2 + 9$$

$$\begin{vmatrix} t^2 & -6 \\ e^t & D-3 \end{vmatrix} = Dt^2 - 3t^2 + 6e^t = 2t - 3t^2 + 6e^t$$

$$\begin{vmatrix} D-3 & t^2 \\ D & e^t \end{vmatrix} = De^t - 3e^t - Dt^2 = e^t - 3e^t - 2t = -2e^t - 2t$$

άρα

$$(D^2 + 9)x = 2t - 3t^2 + 6e^t \rightarrow x''(t) + 9x(t) = 2t - 3t^2 + 6e^t$$

$$(D^2 + 9)y = -2e^t - 2t \rightarrow y''(t) + 9y(t) = -2e^t - 2t$$

άρα έχουμε

$$\begin{cases} x''(t) + 9x(t) = 2t - 3t^2 + 6e^t & \textcircled{I} \\ y''(t) + 9y(t) = -2e^t - 2t & \textcircled{II} \end{cases}$$

Οι αντίστοιχες ομογενείς των $\textcircled{I}, \textcircled{II}$ έχουν την ίδια χαρακτηριστική εξίσωση

$$\lambda^2 + 9 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 3i, \lambda_2 = -3i$$

61

από οι λύσεις τους είναι:

$$x_h = e^0 [C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t)]$$

$$y_h = e^0 [C_3 \cos(3t) + C_4 \sin(3t)]$$

Τώρα για την ειδική λύση της (I) είναι

$$x_p(t) = C_5 t^2 + C_6 t + C_7 + C_8 e^t$$

ομοίως

$$x'' + 9x(t) = C_5 + C_8 e^t + 9C_5 t^2 + 9C_6 t + 9C_7 + 9C_8 e^t$$

$$= \cancel{C_8 e^t} + \cancel{9C_8 e^t}$$

$$= 10C_8 e^t + 9C_5 t^2 + 9C_6 t + C_5 + 9C_7 = 6e^t + 3t^2 + 2t$$

$$\text{από } C_8 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\text{και } C_5 + 9C_7 = 0 \rightarrow 9C_7 = -\frac{1}{3} \rightarrow$$

$$C_5 = -\frac{1}{3}$$

$$C_7 = -\frac{1}{27}$$

$$C_6 = \frac{2}{9}$$

$$\text{από } x_p = -\frac{1}{3} t^2 + \frac{2}{9} t - \frac{1}{27} + \frac{3}{5} e^t$$

Για την ειδική λύση της (II) είναι:

$$y(t) = C_9 t + C_{10} + C_{11} e^t$$

$$y'' + 9y = 2e^t - 2t \rightarrow \underline{C_{11} \cdot e^t} + 9C_9 t + 9C_{10} + \underline{9C_{11} e^t} =$$

$$= 10C_{11} e^t + 9C_9 t + 9C_{10} = 2e^t - 2t$$

$$\text{ήρα } C_4 = \frac{1}{5}$$

$$C_9 = -\frac{2}{9}$$

$$C_{10} = 0$$

ήρα

$$y_p = -\frac{2}{9}t + \frac{1}{5}e^t$$

ήρα ~~α~~ οι γενικές λύσεις του συστήματος είναι:

$$x(t) = x_p + x_h = -\frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{9}t - \frac{1}{27} + \frac{3}{5}e^t + C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t)$$

$$y(t) = y_p + y_h = -\frac{2}{9}t + \frac{1}{5}e^t + C_3 \cos(3t) + C_4 \sin(3t)$$

Από τις 4 μεταβλητές C_1, C_2, C_3, C_4 μόνο 2 είναι ανεξάρτητες. Επαληθεύοντας λοιπόν τις λύσεις στο σύστημα βρίσκω C_3, C_4 εξαρτώμενες από C_1, C_2

Πρόβλημα 5 (Θέμα 1/2015)

Επιλυστε το σύστημα: $x''(t) + y''(t) + x(t) = 5$ (I)

$$y(t) + y''(t) - 2x''(t) = t$$

Λύση Γράφουμε το (I) σε μορφή διαφορών D

$$\left. \begin{aligned} D^2 x + D^2 y + x &= 5 \\ y - D^2 y - 2D^2 x &= t \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} (D^2 + 1)x + D^2 y &= 5 \\ -2D^2 x + (1 - D^2)y &= t \end{aligned}$$

αναζητούμε τις ορίζουσες

$$\begin{vmatrix} D^2 + 1 & D^2 \\ -2D^2 & 1 - D^2 \end{vmatrix} = 1 - D^4 + 2D^4 = 1 + D^4$$

$$\begin{vmatrix} 5 & D^2 \\ t & 1 - D^2 \end{vmatrix} = 5 - 5D^2 - tD^2 = 5 - D^2(5 + t)$$

$$\begin{vmatrix} D^2 + 1 & 5 \\ -2D^2 & t \end{vmatrix} = 5D^2 + 5t + 10D^2 = 5D^2 + 5t + 10D^2$$

άρα

$$(1 + D^2)x = 5 - D^2(5 + t) = 5 \rightarrow x''(t) + x(t) = 5 \quad \textcircled{I}$$

$$(1 + D^2)y = 5t \rightarrow y''(t) + y(t) = 5t \quad \textcircled{II}$$

Οι αντίστοιχες ομογενείς των $\textcircled{I}$ $\textcircled{II}$ έχουν την ίδια χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \rightarrow \lambda = \pm i$$

άρα οι λύσεις τους είναι:

$$\begin{cases} x_h = e^0 [c_1 \cos t + c_2 \sin t] \\ y_h = e^0 [c_3 \cos t + c_4 \sin t] \end{cases}$$

Γωρα για την ειδική γύση της (I) είναι
 $x(t) = C_5$

αρα $C_5 = 5$ αρα $x(t) = 5$ οη $X_p = 5$
 Για την ειδική γύση της (II) είναι
 $y(t) = C_6 t + C_7$

$$y''(t) + y(t) = C_6 t + C_7 = 5t$$

$$C_7 = 0 \quad C_6 = t \quad \alpha \alpha \quad y_p = 5t$$

Επομένως $x(t) = x_p + x_h = 5 + C_1 \cos t + C_2 \sin t$
 $y(t) = y_p + y_h = 5t + C_3 \cos t + C_4 \sin t$

Επαγωγή/δενύση

$$x''(t) + y''(t) + x(t) = -C_1 \cos t - C_2 \sin t + C_3 \cos t - C_4 \sin t + 5 + C_1 \cos t + C_2 \sin t =$$

Νοί γινθεί το διαφορικό σύστημα: $y_1'' + y_2' - 2y_1 + 2y_2 = 0$ (2)

$$y_2'' - y_1' + 2y_1 - 4y_2 = 0$$

~~Αντί~~ $y_1(0)=0, y_1'(0)=1, y_2(0)=1, y_2'(0)=0$
~~Αντί~~ Γράφουμε το (2) με μορφή τελεστή D

$$(D^2 - 2)y_1 + (D + 2)y_2 = 0$$

$$(-D + 2)y_1 + (D^2 - 4)y_2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} D^2 - 2 & D + 2 \\ 2 - D & D^2 - 4 \end{vmatrix} = D^4 - 4D^2 - 2D^2 + 8 - 4 + D^2 = D^4 - 5D^2 + 4$$

Για $(D^4 - 5D^2 + 4)y_{1,2} = 0$ και ελέγχουμε $p^4 - 5p^2 + 4 = 0$

$$p_1 = 1$$

$$p_2 = -1$$

$$p_3 = 2$$

$$p_4 = -2$$

$$y_1 = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x}$$

$$y_2 = k_1 e^x + k_2 e^{-x} + k_3 e^{2x} + k_4 e^{-2x}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1) ΔΕ. α' τάξης χωρίσμων μεταβλητών (ΕΙ)

$$A(x)dx + B(y)dy = 0$$

π.χ. $x \cos x \cdot dx + (1 - 6y^5) dy = 0$ με $y(0) = 0$

2) ΔΕ ομογενής α' τάξης

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{ με } f(tx, ty) = f(x, y)$$

π.χ. $y' = \frac{y+x}{x}$ (θέτω $y = xv$)

3) Πλήρης διαφορική εξίσωση α' τάξης

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

με $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$

(Υπάρχει $g(x, y)$ με $dg(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$)

π.χ. $2xy dx + (1+x^2) dy = 0$

(μεθοδολογία: $\int 2xy dx = yx^2$, $g(x, y) = yx^2 + h(y)$, $\frac{dg}{dy} = 1+x^2$

$$x^2 + h'(y) = 1+x^2 \sim h'(y) = 1 \quad h(y) = y + C_1$$

αρα $g(x, y) = yx^2 + y + C_1 = C_2 \rightarrow y = \frac{C}{x^2 + 1}$

4) Παράγοντας ολοκλήρωσης

π.χ. $y dx - x dy = 0$ (παράγοντας ολοκλήρωσης $I = \frac{1}{x^2}$)

5) Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις α' τάξης

$$y' + P(x) \cdot y = q(x)$$

(παράγοντας ολοκλήρωσης $I(x, y) = e^{\int P(x) dx}$)

π.χ. $y' - 3y = 6$ $P(x) = -3$

6) Βεζνουέλι $y' + f(x) \cdot y = g(x) \cdot y^n \quad n \neq 0, 1$

(Ε2)

Αντικατάσταση $z = y^{1-n}$

π.χ. $y' + xy = x \cdot y^2$

7) Γραμμικές Δ.Ε.

α) ορίζουσα Wronski W

β) γραμμικά ανεξάρτητες συνάρτησεις $W \neq 0$

γ) $L(y) = 0$ γραμμική ομογενής Δ.Ε. η τ.σ. έχει
η γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$
τότε γενική τ.λ. είναι: $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$

δ) Γραμμική μη ομογενής Δ.Ε. $L(y) = f(x)$

y_p μια βερική λύση της $L(y) = f(x)$

y_h μια γενική λύση της $L(y) = 0$

τότε η γενική λύση της $L(y) = f(x)$ είναι

$$y = y_p + y_h$$

π.χ. $y'' + 4y = x$

8) Γραμμικές ομογενείς Δ.Ε. 2^η τ.σ. με σταθερούς συντελεστές

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad a_1, a_0 \in \mathbb{R}$$

χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$

i) περίπτωση $\Delta > 0 \quad \Delta_1 \neq \Delta_2 \quad y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

ii) $\Delta = 0 \quad \Delta_1 = \Delta_2 \quad y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}$

iii) $\Delta < 0 \quad \Delta_{1,2} = \alpha \pm bi \quad y = C_1 e^{\alpha x} \cos bx + C_2 e^{\alpha x} \sin bx$

9) Γραμμικές ομογενείς Δ.Ε. η τ.σ. με σταθερούς συντελεστές

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

χαρακτ. εξίσωση $\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$

π.χ. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

χαρακτ. εξίσωση $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$

ΕΞΙΣΤΕΥΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

1) Γραμμική ομογενής ελλείπει διαφορών

$$y(n+N) + a_{N-1}y(n+N-1) + \dots + a_0y(n) = 0 \quad (I)$$

N τάξης με συντελεστές σταθερούς οι συναρτήσεις της του οπ. άνω του y.

π.χ $y(n+3) - 2y(n+2) - y(n+1) + 2y(n) = 0$

παίρνω χαρακτηριστική ελλείπει $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$ τότε:

1) Απλή ρίζα $b \xrightarrow{\lambda=b} \boxed{y(n) = C \cdot b^n}$

2) Απλή μιγαδική ρίζα $b = x \pm iy \rightarrow y(n) = e^{nx} [C_1 \cos(ny) + C_2 \sin(ny)]$
 $= e^{nx} (\cos \theta + i \sin \theta)$

3) Πρωτ. ρίζα b $\xrightarrow{k=4} y(n) = (C_1 n^3 + C_2 n^2 + C_3 n + C_4) b^n$
 πολλαπλότητα π.χ y $\xrightarrow{k=3} y(n) = (C_1 n^2 + C_2 n + C_3) b^n$

4) Μιγαδική $b = x \pm iy = e^{nx} e^{\pm i ny} \xrightarrow{k=3} \{ [C_1 n^2 + C_2 n + C_3] \cos(ny) + [C_1' n^2 + C_2' n + C_3'] \sin(ny) \}$
 $= e^{nx} (\cos \theta + i \sin \theta)$

$\xrightarrow{k=4} \boxed{y(n) = e^{nx} \{ [C_1 n^3 + C_2 n^2 + C_3 n + C_4] \cos(ny) + [C_1' n^3 + C_2' n^2 + C_3' n + C_4'] \sin(ny) \}}$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 / $x_1(n), x_2(n)$ γραμμικά ανεξάρτητες αν για κάθε

$$\lambda_1 x_1(n) + \lambda_2 x_2(n) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 / $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$ γραμ. ανεξάρτ. αν για κάθε

$$\lambda_1 x_1(n) + \lambda_2 x_2(n) + \dots + \lambda_k x_k(n) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 / Έστω οι πραγματικές ακολουθίες $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$

η ορίσινος

$$C(x_1, x_2, \dots, x_k)(n) = \begin{vmatrix} x_1(n) & x_2(n) & \dots & x_k(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & \dots & x_k(n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1(n+k-1) & x_2(n+k-1) & \dots & x_k(n+k-1) \end{vmatrix}$$

λέγεται ορίζουσα
Cassation

Παράγωγο 1 / Αν $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$ είναι ακολουθίες με $C(x_1, x_2, \dots, x_k)(n) \neq 0$ τότε αυτές είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Παράγωγο 2 / Αν $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$ είναι λύσεις της (I) τότε

η γενική λύση της (I) είναι:

$$x(n) = C_1 x_1(n) + C_2 x_2(n) + \dots + C_k x_k(n)$$

2) Μη ομογενή γραμμική εξίσωση διαφορών N τάξης
 $y(n+N) + a_{N-1}y(n+N-1) + \dots + a_0y(n) = b(n)$ (II)

(Εγ)

όπου τα a_i, b μπορεί να είναι συναρτήσεις του n από οχίτου
Θεώρημα. Αν $f(n)$ λύση της αντίστοιχης ομογενούς

$\psi(n)$ μια συγκεκριμένη λύση της (II)
 Τότε η γενική λύση είναι:

$$y(n) = f(n) + \psi(n)$$

π.χ. $y(n+2) - 6y(n+1) + 8y(n) = 3n^2 + 2n - 5 \cdot 3^n$
 χαρακτ. ομοφ. $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4 \quad f(n) = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 4^n$

Τώρα συγκεκριμένη λύση της (II)

$$\psi(n) = A_1 n^2 + A_2 n + A_3 + A_4 3^n = n^2 + \frac{10}{3}n + \frac{46}{9} + 5 \cdot 3^n$$

Άρα γενική λύση της (II) είναι:

$$y(n) = f(n) + \psi(n) = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 4^n + n^2 + \frac{10}{3}n + \frac{46}{9} + 5 \cdot 3^n$$

ΠΑΝΟΣ

4 Μαρ 2017

ΠΑΡΑΜΗΚΕΣ ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΤΑΞΗΣ

$$1) y'' + y' + y = 15t - 6$$

$$i) y'' + y' + y = 0 \rightarrow \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\rightarrow \lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$y_h = e^{-\frac{t}{2}} \left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right]$$

$$ii) y'' + y' + y = 15t - 6$$

Επίσης γύρω $y(t) = C_3 t + C_4$

$$y'' + y' + y = C_3 + C_3 t + C_4 = C_3 t + C_3 + C_4 = 15t - 6$$

άρα $C_3 = 15, C_4 = -21 \quad y_p = 15t - 21$

άρα

$$y(t) = y_p + y_h = 15t - 21 + e^{-\frac{t}{2}} \left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right]$$

$$2) z'' + z' + z = 3t - 9 - e^t$$

$$i) z'' + z' + z = 0 \rightarrow \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\rightarrow \lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_h = e^{-\frac{t}{2}} \left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right]$$

$$z'' + z' + z = 3t - 9 - e^t$$

Επίσης γύρω $z(t) = C_3 t + C_4 + C_5 e^t$

$$z'' + z' + z = C_5 \cdot e^t + C_3 + C_5 \cdot e^t + C_3 t + C_4 + C_5 \cdot e^t =$$

$$= 3C_5 e^t + C_3 t + C_3 + C_4 = -e^t + 3t - 9$$

$$C_5 = -\frac{1}{3} \quad C_3 = 3 \quad C_4 = -9 - 3 = -12 \quad \text{άρα } z_p$$

$$z_p = -12 + 3t - \frac{1}{3}e^t$$

άρα $z(t) = z_p + z_h = -12 + 3t - \frac{1}{3}e^t + e^{-\frac{t}{2}} \left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right]$

ΠΑΡΑΜΜΙΚΕΣ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ η ΤΑΞΗΣ.

$$1) y'' - 7y' = 0 \quad \lambda^2 - 7\lambda = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow \lambda = 0 \\ \searrow \lambda = 7 \end{matrix} \quad y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{7x}$$

$$2) y'' + 4y' + 5y = 0 \quad \lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow \lambda_1 = -2 + i \\ \searrow \lambda_2 = -2 - i \end{matrix} \quad y = e^{-2x} [C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)]$$

$$3) y'' + 4y' + 4y = 0 \quad \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow \lambda_1 = -2 \\ \searrow \lambda_2 = -2 \end{matrix} \quad y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$$

$$4) y'' - 3y' + 4y = 0 \quad \lambda^2 - 3\lambda + 4 = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow \lambda_1 = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \\ \searrow \lambda_2 = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2} \end{matrix} \quad y = e^{\frac{3}{2}x} [C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)]$$

$$5) y^{(4)} - 4y''' + 7y'' + 6y = 0 \quad \lambda^4 - 4\lambda^3 + 7\lambda^2 + 6 = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow \lambda_1 = 2 + i\sqrt{2} \\ \searrow \lambda_2 = 2 - i\sqrt{2} \\ \swarrow \lambda_3 = i \\ \searrow \lambda_4 = -i \end{matrix}$$

$$y = e^{2x} [C_1 \cos(\sqrt{2}x) + C_2 \sin(\sqrt{2}x)] + e^0 [C_3 \cos(x) + C_4 \sin(x)]$$

$$6) y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0 \quad \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow \lambda_1 = 1 \\ \searrow \lambda_2 = 2 \\ \swarrow \lambda_3 = 3 \end{matrix}$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$$

$$7) y^{(4)} + 9y'' + 20y = 0 \quad \lambda^4 + 9\lambda^2 + 20 = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow \lambda_1 = 2 \\ \searrow \lambda_2 = -2 \\ \swarrow \lambda_3 = \sqrt{5} \\ \searrow \lambda_4 = -\sqrt{5} \end{matrix}$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{\sqrt{5}x} + C_4 e^{-\sqrt{5}x}$$

$$8) y^{(4)} - y = 0 \quad \lambda^4 - 1 = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow \lambda_1 = 1 \\ \searrow \lambda_2 = -1 \\ \swarrow \lambda_3 = i \\ \searrow \lambda_4 = -i \end{matrix}$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + e^0 [C_3 \cos(x) + C_4 \sin(x)]$$

1) Δ.Ε. α'ταξ'ης χωρίσμενων μεταβλητών

$$\int x dx - \int y^2 dy = 0 \Leftrightarrow \int x dx - \int y^2 dy = c \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3} = c \quad \text{κ.γ.π}$$

2) Δ.Ε. διαφορής α'ταξ'ης ($f(tx, ty) = f(x, y)$)

$$y' = \frac{y+x}{x} \text{ ① } \text{Θέτω } y = xv \sim \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

$$\text{①} \Leftrightarrow v + x \frac{dv}{dx} = \frac{xv+x}{x} \Leftrightarrow v + x \frac{dv}{dx} = v + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} dx - dv = 0$$

$$\ln|x| - v = c \sim \frac{y}{x} = \ln|kx| \Leftrightarrow y = x \ln|kx|$$

3) Ήγρης διαφορική εξίσωση α'ταξ'ης

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (\text{πρέπει } \frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx})$$

$$2xy dx + (1+x^2) dy = 0$$

Θέτω να βρω $g(x, y) : dg(x, y) = M(x, y) dx + N(x, y) dy$

$$\frac{dg(x, y)}{dx} = M(x, y) \quad \frac{dg(x, y)}{dy} = N(x, y) \quad \text{οπότε } g(x, y) = c \text{ ③}$$

$$\frac{2xy dx}{M(x, y)} + \frac{(1+x^2) dy}{N(x, y)} = 0 \text{ ① } \int 2xy dx = yx^2 \text{ άρα } g(x, y) = yx^2 + h(y) \text{ ②}$$

$$\frac{dg}{dy} \stackrel{\text{①}}{=} 1+x^2 \stackrel{\text{②}}{=} x^2 + h'(y) \sim h'(y) = 1 \sim h(y) = y + c$$

$$\text{άρα } g(x, y) = yx^2 + y + c_1 = c_2 \sim y = \frac{c}{1+x^2}$$

4) Παράγοντας ολοκληρώσεως

$$y dx - x dy = 0 \sim x dy - y dx = 0 \quad (\text{παράγοντας ολοκλ. } I = \frac{1}{x^2})$$

$$\frac{x dy - y dx}{x^2} = 0 \quad d\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \sim \frac{y}{x} = c \Rightarrow y = cx$$

5) Γραμμική διαφορική εξίσωση 1^{ης} ταξ'ης:

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad \text{παραγ. ολοκλ. } I(x, y) = e^{\int P(x) dx}$$

$$y' - 3y = 6 \quad I(x, y) = e^{\int -3 dx} = e^{-3x} \quad \text{άρα } y' \cdot e^{-3x} - 3e^{-3x} y = 6 \cdot e^{-3x} \Leftrightarrow \frac{d(ye^{-3x})}{dx} = 6e^{-3x} \Leftrightarrow ye^{-3x} = -2e^{-3x} + c \Leftrightarrow y = ce^{3x} - 2$$

6) $\Delta \in$ Bernoulli

(C8)

$$y' + f(x)y = g(x) \cdot y^n \quad n \neq 0, 1$$

$$y' + xy = xy^2 \quad (I) \quad n=2 \quad \text{ορίζω } z = y^{1-n} = y^{-1} = \frac{1}{y} \rightarrow y = \frac{1}{z}, y' = -\frac{z'}{z^2}$$

$$(I) -\frac{z'}{z^2} + \frac{x}{z} = \frac{x}{z^2} \rightarrow \underbrace{z' - xz}_{-xz} = -x \quad I(x, y) = e^{\int -x dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} z' - x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} z = -e^{-\frac{x^2}{2}} x \Leftrightarrow \frac{d(z e^{-\frac{x^2}{2}})}{dx} = -x e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$z \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}} + C_1 \quad \text{ήτοι } y = \frac{1}{z} = \frac{1}{1+C_1 e^{\frac{x^2}{2}}}$$

7) Γραμμική ομογενής 2^{ος} τάξης

$$y'' - 7y' = 0 \quad \text{χαρακ. εξίσωση } \lambda^2 - 7\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 7 \quad y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{7x} = C_1 + C_2 e^{7x}$$

8) Γραμμική ομογενής 3^{ος} τάξης

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0 \quad \text{χ.ε. } \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \rightarrow \begin{matrix} \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \\ \lambda = 3 \end{matrix} \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$$

$$y^{(4)} - 4y''' + 7y'' + 6y = 0 \quad \text{χ.ε. } \lambda^4 - 4\lambda^3 + 7\lambda^2 + 6 = 0 \quad \lambda_{1,2} = 2 \pm i\sqrt{2} \quad \lambda_{3,4} = \pm i$$

$$y = C_1 e^{2x} \cos \sqrt{2}x + C_2 e^{2x} \sin \sqrt{2}x + C_3 e^{0x} \cos(1x) + C_4 e^{0x} \sin(1x)$$

9) Γραμμική μη ομογενής 2^{ος} τάξης

$$y'' + y' + y = 15t - 6$$

$$y'' + y' + y = 0 \quad \text{χ.ε. } \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$y_h = C_1 e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + C_2 e^{-\frac{t}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t$$

$$\text{βιολική αλβή } y_p(t) = C_3 t + C_4 = 15t - 6$$

$$y_p''(t) + y_p' + y_p = C_3 + C_3 t + C_4 = 15t - 6 \rightarrow C_3 = 15 \quad \text{και } C_3 + C_4 = -6 \rightarrow C_4 = -21$$

$$\text{ήτοι } y_p(t) = 15t - 21 \quad \text{επομένως}$$

$$y(t) = y_p + y_h = 15t - 21 + C_1 e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + C_2 e^{-\frac{t}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t$$

10) Γραμμική ομογενής 3^{ος} τάξης με διττό ρίζα

$$(i) y''' - y'' - y' + y = 0 \quad \text{χ.ε. } \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \rightarrow \begin{matrix} \lambda = 1 \text{ (διττό ρίζα)} \\ \lambda = -1 \end{matrix}$$

$$\text{οπότε } y(t) = (C_1 + C_2 x) e^x + C_3 e^{-x}$$

$$(ii) y^{(4)} + 8y''' + 16y'' = 0 \quad \text{χ.ε. } \lambda^4 + 8\lambda^3 + 16\lambda^2 = 0 \quad \lambda = 2i \text{ (διττό ρίζα)} \quad \lambda = -2i \text{ (διττό ρίζα)}$$

$$\text{βιολική αλβή } y(t) = (C_1 x + C_2) \cos(2x) + (C_3 x + C_4) \sin(2x)$$

ΕΞΙΣΤΗΝΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

(Ε9)

I) ΟΜΟΓΕΝΗΣ η ΤΑΥΤΗΣ

$$y(n+3) - 5y(n+2) + 8y(n+1) - 4y(n) = 0 \quad x \in \mathbb{Z} \quad b^3 - 5b^2 + 8b - 4 = 0 \quad \begin{matrix} b=1 \\ b_2=2 \end{matrix}$$

Γενική λύση $y(n) = C_1 \cdot 1^n + (C_2 n + C_3) 2^n$

2) $x_{n+2} + 9x_n = 0 \quad x \in \mathbb{Z} \quad b^2 + 9 = 0 \quad \begin{matrix} b_1 = 3i \\ b_2 = -3i \end{matrix} \quad b_{1,2} = 3(\cos \frac{\pi}{2} \pm i \sin \frac{\pi}{2})$

Γενική λύση $x_n = 3^n [\cos(\frac{n\pi}{2}) + i \sin(\frac{n\pi}{2})]$

3) $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0 \quad x \in \mathbb{Z} \quad \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 2$

Γενική λύση $x_n = (C_1 n + C_2) 2^n$

4) Αν η παραδοχή $b = x + iy = e^{i\theta} [\cos \theta + i \sin \theta]$ είναι πραγματικός τότε η γενική λύση είναι:

$$y_n = e^{in\theta} [(C_1 n^2 + C_2 n + C_3) \cos(n\theta) + (C_4 n^2 + C_5 n + C_6) \sin(n\theta)]$$

II) Μη ομογενής Εξίσωση διαφορών

$$y(n+2) - 6y(n+1) + 8y(n) = 3n^2 + 2n - 5 \cdot 3^n \quad (I)$$

Λύση $y(n+2) - 6y(n+1) + 8y(n) = 0 \quad x \in \mathbb{Z} \quad \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 4 \end{matrix}$

$y_h(n) = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 4^n$

Αν $y_p(n) = A_1 n^2 + A_2 n + A_3 + A_4 3^n$ είναι μία particular λύση της (I) τότε:

$$y(n+2) - 6y(n+1) + 8y(n) = A_1(n+2)^2 + A_2(n+2) + A_3 + A_4 3^{n+2} - 6[A_1(n+1)^2 + A_2(n+1) + A_3 + A_4 3^{n+1}] + 8[A_1 n^2 + A_2 n + A_3 + A_4 3^n]$$

$\Rightarrow A_1 = 1, A_2 = \frac{10}{3}, A_3 = \frac{46}{9}, A_4 = 5$

$y_p(n) = n^2 + \frac{10}{3}n + \frac{46}{9} + 5 \cdot 3^n$ άρα γενική λύση

$y(n) = y_h(n) + y_p(n) = C_1 2^n + C_2 4^n + n^2 + \frac{10}{3}n + \frac{46}{9} + 5 \cdot 3^n \quad n \geq 0$

III) ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ Α.Ε.

i) Μέθοδος απαγωγής $\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) + t^2 & (1) \\ x_2'(t) = -2x_1(t) + 3x_2(t) - t & (2) \end{cases}$

(2) $\Rightarrow x_2''(t) = -2x_1'(t) + 3x_2'(t) - 1 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} x_2''(t) = -2x_2(t) - 2t^2 + 3x_2'(t) - 1$

$\Rightarrow x_2''(t) - 3x_2'(t) + 2x_2(t) = 2t^2 - 1 \quad (3) \quad x \in \mathbb{Z} \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{matrix}$

$x_h(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} \quad x_p(t) = A_1 t^2 + A_2 t + A_3 = \dots = \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{7}{4}$

άρα γενική λύση $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{7}{4}$

ii) Μέθοδος τελεστών

$\begin{cases} x' = -2x + y + t^2 & (1) \\ y' = x - 2y & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D \cdot x + 2x - y = t^2 \\ D \cdot y + 2y - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (D+2)x - y = t^2 \\ x + (D+2)y = 0 \end{cases}$

όπου $x' = D \cdot x$

$$\begin{vmatrix} D+2 & -1 \\ 1 & D+2 \end{vmatrix} = D^2 + 2D + 4 + 1 = D^2 + 2D + 5$$

(E16)

$$\begin{vmatrix} t^2 & -1 \\ 0 & D+2 \end{vmatrix} = Dt^2 + 2t^2 = 2t + 2t^2$$

$$\begin{vmatrix} D+2 & t^2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = t^2 \quad \text{and} \quad (D^2 + 2D + 5)x = 2t^2 + 2t \quad \text{and} \quad (D^2 + 2D + 5)y = t^2$$

$$x'' + 2x' + 5x = 2t^2 + 2t$$

$$y'' + 4y' + 5y = t^2$$

x - ες. και των 2 ομογενών

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -1 + 2i, \lambda_2 = -1 - 2i$$

από

$$x_h = C_1 e^{(-1+2i)t} + C_2 e^{(-1-2i)t}, y_h = C_3 e^{4t} + C_4 e^{4t}$$

ΠΑΝΟΣ

4 Mar 2017

2:53 μμ, 4 Mar 2017

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
Χαρ. Εξ. 6.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΕΙΠ
Χαρ. Εξ. 6.

1) $\lambda = 2 \quad \lambda = 3$
 $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

$\lambda = 2 \quad \lambda = 3$
 $y = C_1 2^x + C_2 3^x$

2) $\lambda = 2$ διπλ. ρίζα
 $y = (C_1 x + C_2) e^{2x}$

$\lambda = 2$ διπλ. ρίζα
 $y(\eta) = (C_1 \eta + C_2) \cdot 2^\eta$

3) $\lambda = 5$ τετραπλ. ρίζα
 $y = (C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4) \cdot e^{5x}$

$\lambda = 4$ τετραπλ. ρίζα
 $y(\eta) = (C_1 \eta^3 + C_2 \eta^2 + C_3 \eta + C_4) 5^\eta$

4) $\lambda_1 = 2 + i\sqrt{2} \quad \lambda_2 = 2 - i\sqrt{2}$
 $y = e^{2x} [C_1 \cos(\sqrt{2}x) + C_2 \sin(\sqrt{2}x)]$

$\lambda_{1,2} = 2 \pm i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} \pm i \sin \frac{\pi}{3} \right)$
 $y = 2^\eta [C_1 \cos\left(\frac{\eta\pi}{3}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\eta\pi}{3}\right)]$

5) $\lambda = 4$ τριπλ. ρίζα $\lambda = 1 \pm i\sqrt{3}$ διπλ. ρίζα

$\lambda = 4$ τριπλ. ρίζα $\lambda = 1 \pm i\sqrt{3}$ διπλ. ρίζα
 $\lambda = 2 \left[\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right]$

~~$y = (C_1 x^2 + C_2 x + C_3) e^{4x} + (C_4 x^2 + C_5 x + C_6) \cos(\sqrt{3}x) + (C_7 x + C_8) \sin(\sqrt{3}x)$~~
 $y = (C_1 x^2 + C_2 x + C_3) e^{4x} + e^x \{ (C_4 x + C_5) \cos(\sqrt{3}x) + (C_6 x + C_7) \sin(\sqrt{3}x) \}$

$y(\eta) = (C_1 \eta^2 + C_2 \eta + C_3) 4^\eta + 2^\eta \{ (C_4 \eta^2 + C_5 \eta + C_6) \cos\left(\frac{\eta\pi}{3}\right) + (C_7 \eta^2 + C_8 \eta + C_9) \sin\left(\frac{\eta\pi}{3}\right) \}$

(6) (12)
 Ασκ. 1. Να λυθεί η ΔΕ $y^{(4)} + 6y^{(3)} + 14y'' + 16y' + 8y = 10$
 και εφόσον οι αρχικές όροι είναι $y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 0, y'''(0) = 0$
 $\lambda^4 + 6\lambda^3 + 14\lambda^2 + 16\lambda + 8 = 0 \rightarrow \lambda = 2(6 \text{ ή } 8 \text{ ή } 14 \text{ ή } 16)$
 $\lambda = -1 \pm i$
 $y_h(t) = (c_1 + c_2 t) \cdot e^{2t} + c_3 e^{-t} \cos t + c_4 e^{-t} \sin t$
 $y_p(t) = k \quad y_p^{(4)}(t) + 6y_p^{(3)}(t) + 14y_p''(t) + 16y_p'(t) + 8y_p(t) = 10 \sim 8k = 10 \rightarrow$
 $k = \frac{5}{4}$

άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι:

$$y(t) = y_h + y_p = y(t) = (c_1 + c_2 t) \cdot e^{2t} + c_3 e^{-t} \cos t + c_4 e^{-t} \sin t + \frac{5}{4}$$