

Από κοινό κατανομή (Ανεξαρτησία)

| $\phi$ (νοικοκυριά) | A | B | F | A | E | ΣΤ |
|---------------------|---|---|---|---|---|----|
| X (αριθμός μεγάλων) | 5 | 2 | 5 | 5 | 1 | 4  |
| Y (αριθμός δωμάτων) | 4 | 2 | 4 | 3 | 2 | 3  |

ΠΙΝΑΚΑΣ

| $x \backslash y$ | 2             | 3             | 4             | $P_X(x)$      |
|------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 1                | $\frac{1}{6}$ | 0             | 0             | $\frac{1}{6}$ |
| 2                | $\frac{1}{6}$ | 0             | 0             | $\frac{1}{6}$ |
| <del>4</del>     | 0             | $\frac{1}{6}$ | 0             | $\frac{1}{6}$ |
| 5                | 0             | $\frac{1}{6}$ | $\frac{2}{6}$ | $\frac{3}{6}$ |
| $P_Y(y)$         | $\frac{2}{6}$ | $\frac{2}{6}$ | $\frac{2}{6}$ | 1             |

ΠΕΡΙΘΩΡΙΟ  
6.β.η  
7.β X

ΠΕΡΙΘΩΡΙΟ  
6.β.η  
7.β Y

Δεδομένη πιθανότητα

$$a) P(X/y) = P[X=x/Y=y] = \frac{P[X=x, Y=y]}{P(Y=y)}$$

$$b) P(Y/x) = P[Y=y/X=x] = \frac{P[X=x, Y=y]}{P(X=x)}$$

Παραδείγματα

$$P_x(4/3) = \frac{P(4,3)}{P(3)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{6}} = \frac{1}{2}$$

(δηλ η πιθανότητα ένα νοικοκυριό που μένει σε τριόρι να είναι τετραμερές είναι  $\frac{1}{2}$ )

$$P_x(1/3) = \frac{P(1,3)}{P(3)} = \frac{0}{\frac{2}{6}} = 0$$

$$P_x(5/3) = \frac{P(5,3)}{P(3)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{6}} = \frac{1}{2}$$

$$P_y(4/5) = \frac{P(4,5)}{P(5)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}$$

ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ

Ορίζεται  $X, Y$  ανεξάρτητες  $\Leftrightarrow P(x, y) = P_X(x) \cdot P_Y(y) \quad \forall x \in S_X, y \in S_Y$   
αν  $X, Y$  ανεξάρτητες τότε

$$P(X/y) = P_X(x) \quad \text{και} \quad P(Y/x) = P_Y(y)$$

$$i) E(X/Y=3) = \sum_x x \cdot P(X=x|Y=3) = \sum_x x \cdot \frac{P(X,3)}{P_Y(3)}$$

$$= 1 \cdot \frac{P(1,3)}{\frac{2}{6}} + 2 \cdot \frac{P(2,3)}{\frac{2}{6}} + 4 \cdot \frac{P(4,3)}{\frac{2}{6}} + 5 \cdot \frac{P(5,3)}{\frac{2}{6}} =$$

$$= 1 \cdot \frac{0}{\frac{2}{6}} + 2 \cdot \frac{0}{\frac{2}{6}} + 4 \cdot \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{6}} + 5 \cdot \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{6}} =$$

$$= 2 + 2,5 = 4,5$$

$$ii) E(X) = \sum_x x \cdot P_X(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{2}{6} = \frac{22}{6}$$

$$E(Y) = \sum_y y \cdot P_Y(y) = 2 \cdot \frac{2}{6} + 3 \cdot \frac{2}{6} + 4 \cdot \frac{2}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

$$E(X^2) = \sum_x x^2 \cdot P_X(X) = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 16 \cdot \frac{1}{6} + 25 \cdot \frac{2}{6} = \frac{31}{6} + \frac{50}{6} = \frac{81}{6} = 16$$

$$E(Y^2) = \sum_y y^2 \cdot P_Y(y) = 4 \cdot \frac{2}{6} + 9 \cdot \frac{2}{6} + 16 \cdot \frac{2}{6} = 29 \cdot \frac{2}{6} = \frac{58}{6}$$

$$E(XY) = \sum_x \sum_y xy \cdot P(X,Y) = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot 4 \cdot \frac{2}{6} =$$

$$= \frac{2}{6} + \frac{4}{6} + \frac{12}{6} + \frac{15}{6} + \frac{40}{6} = \frac{73}{6}$$

$$ii) \text{ συνδιακ/μικρο } \text{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = \frac{73}{6} - \frac{22}{6} \cdot 3 = \frac{7}{6}$$

$$\text{όρα } \boxed{\text{cov}(X,Y) = \frac{7}{6}} = 1,17 \quad \text{ή} \quad \sigma_{xy} = \frac{7}{6}$$



ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ.

$$\rho_{xy} = \text{cor}(x, y) = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{\text{var}(x)} \cdot \sqrt{\text{var}(y)}} = \frac{6xy}{6x \cdot 6y}$$

$$\text{Var}(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = 16 - \left(\frac{22}{6}\right)^2 = 16 - 13,44 = 2,56$$

$$\text{Var}(y) = E(y^2) - [E(y)]^2 = \frac{58}{6} - 9 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0,67$$

αρα  $\rho_{xy} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{\text{var}(x)} \cdot \sqrt{\text{var}(y)}} = \frac{6xy}{6x \cdot 6y} = \frac{1,17}{1,6 \cdot 0,82} = \frac{1,17}{1,312} = 0,89$

ΣΥΝΛΙΑΚΥΜΑΝΣΗ ΚΑΙ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣυνδιακύβανση

$$\begin{aligned} 6xy &= \text{cov}(x, y) = E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] = \\ &= \sum_{(x, y) \in S_{xy}} (x - \mu_x)(y - \mu_y) \cdot P(x, y) \end{aligned}$$

Ιδιότητες

- i)  $\text{cov}(x, y) = \text{cov}(y, x)$
- ii)  $\text{cov}(ax, by) = ab \text{cov}(x, y)$
- iii)  $\text{cov}(x, x) = V(x)$
- iv)  $x, y$  ανεξ  $\Leftrightarrow \text{cov}(x, y) = 0$
- v)  $\text{cov}(x, y) = E(xy) - E(x) \cdot E(y)$

Συσχέτιση

$$\rho_{xy} = \text{cor}(x, y) = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{V(x)} \sqrt{V(y)}} = \frac{6xy}{6x \cdot 6y}$$

Ιδιότητες

- i)  $-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$
- ii)  $\rho_{xy} = 1$  αν  $y = ax + b$  με  $a > 0$   
 $\rho_{xy} = -1$  αν  $y = ax + b$  με  $a < 0$
- iii)  $\rho_{xy} = 0 \Leftrightarrow 6xy = 0$
- iv)  $\rho_{xy} = 0 \not\Rightarrow x, y$  ανεξάρτητα (γενικά)

Διακύβανση  $E(x) \rightarrow V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 \rightarrow 6x = \sqrt{V(x)}$

$\rightarrow \text{cov}(x, y) = E(xy) - E(x) \cdot E(y) \rightarrow \rho = \frac{6xy}{6x \cdot 6y} = \text{cor}(x, y)$

6xy συν διακύβανση  $\downarrow$  συσχέτιση



# ΣΥΝΟΠΤΙΚΟ ΤΥΠΩΔΩ

Μέση τιμή:  $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$   
 Ιδιότητες

- 1)  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = k \Rightarrow \bar{x} = k$
- 2)  $y = ax + b \Rightarrow \bar{y} = a\bar{x} + b$
- 3)  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2$

Σταθμικός μέσος  
 $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N g_i x_i}{\sum_{i=1}^N g_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N g_i} \sum_{i=1}^N g_i x_i$   
 $\sum_{i=1}^N g_i = 6$

Αιρέμενος =  $M$  Εμπρ. τιμή =  $M_0$

1) Εύρος  $R = \max(x_i) - \min(x_i)$

2) Τεταρτημοριακό εύρος  
 $IQR = Q_3 - Q_1$

25%  $Q_1$  75% 50%  $Q_2 = \bar{x}$  75%  $Q_3$  25%

Διασπορά

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Τυπική απόκλιση  $s = \sqrt{s^2}$   
 $s \sim 6$

α)  $x_1 = x_2 = \dots = x_n \Rightarrow s^2 = 0$

Συντελεστής μεταβλητότητας

β)  $y = ax + b \Rightarrow$   
 $s_y = |a| \cdot s_x$   
 $s_y^2 = a^2 s_x^2$

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{6}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

1) γεωμετρικός μέσος  $G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$  2)  $G \leq \bar{x}$

3) μέσος ποσοστό μεταβολής  $z$

$$z = G - 1 = \sqrt[n]{\frac{x_1}{x_0} \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot \dots \cdot \frac{x_n}{x_{n-1}}} - 1 = \sqrt[n]{\frac{x_n}{x_0}} - 1 \Leftrightarrow$$

$$x_n = x_0 (1+z)^n$$

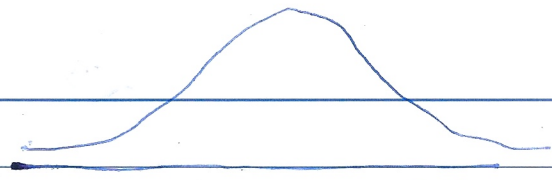
$$M = x_{i-1} + \delta \cdot \frac{\frac{N}{2} - F_{i-1}}{f_i}$$

$$Q_1 = x_{i-1} + \delta \cdot \frac{\frac{N}{4} - F_{i-1}}{f_i}$$

$$Q_3 = x_{i+1} + \delta \cdot \frac{\frac{3N}{4} - F_i}{f_i}$$

$$P_{10\%} = x_{i+1} + \delta \cdot \frac{\frac{KN}{100} - F_i}{f_i}$$

ΤΥΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΤΗΣ  $x$   $z = \frac{x - \bar{x}}{s_x}$



$$(\bar{x}-6, \bar{x}+6) \quad 68,27\%$$

(24)

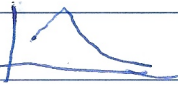
$$(\bar{x}-26, \bar{x}+26) = 95,45\%$$

$$(\bar{x}-36, \bar{x}+36) = 99,73\%$$

$\bar{x} - M_0 \approx 3(\bar{x} - M)$  σε επαφά ασυμμετρίας κατάν.

Κριτήριο Pearson

$\bar{x} - M_0 > 0$  θετική ασυμμετρία



$\bar{x} - M_0 = 0$  συμμετρία



$\bar{x} - M_0 < 0$  αρνητ. ασυμ.



Κριτήριο Pearson  $S_p(M_0) = \frac{\bar{x} - M_0}{6x}$  ή  $S_p(M) = \frac{3(\bar{x} - M)}{6x}$

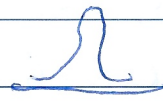
Κριτήριο Bowley  $S_b = \frac{(Q_3 - M) - (M - Q_1)}{Q_3 - Q_1}$   $S_b \in S_p$

ΚΥΡΤΩΣΗ

$$\sum f_i (x_i^k - \bar{x})^p$$

$$b_2 = \frac{\sum f_i}{6^4}$$

Αν  $b_2 > 3$  η κατανομή λέγεται γειττόκυρτη



Αν  $b_2 = 3 \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow$  μεσόκυρτη



Αν  $b_2 < 3 \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow$  πλατύκυρτη



Αν  $-0,3 < S_p(M) < 0,3$  η κατανομή θεωρείται κανονική και  
 έχουμε ότι  $S_p(M) = S_p(M_0) = S_b = 0$ .

یعني  $\bar{x} = M = M_0$

ΠΡΟΣΟΧΗ

$$s_x^2 = \frac{1}{N} \left\{ \sum f_i x_i^2 - \frac{(\sum f_i x_i)^2}{N} \right\} = \frac{1}{N} \sum f_i x_i^2 - \bar{x}^2$$



Τι δυνατότητες

- 1)  $P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B)$
- 2)  $P(A') = 1 - P(A)$
- 3)  $P(\emptyset) = 0$
- 4)  $A \cup A \subseteq B \Rightarrow P(B) = P(A) + P(A' \cap B)$
- 5)  $A \cup A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- 5)  $\left. \begin{aligned} \bigcap_{i=1}^n A_i' &= \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right)' \\ \bigcup_{i=1}^n A_i' &= \left( \bigcap_{i=1}^n A_i \right)' \end{aligned} \right\} \text{De Morgan}$
- 7)  $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i'\right)$
- 6)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- 9)  $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

10) Δεσφέν βέβαιη πιθανότητα  $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad P(A) \neq 0$

11) ΤΥΠΟΣ BAYES  $A_1, A_2, \dots, A_n$  γεγονότα βέβαια και  
 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$  τότε:

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^n [P(B/A_k) \cdot P(A_k)]}$$

12)  $A, B$  ανεξάρτητα αν  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$   
 $A, B, C \Rightarrow$  αν  $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

13)  $P(S, n) =$  διατάξεις η στοιχείων από S  $P(S, n) = \frac{S!}{(S-n)!}$

14)  $P(S, S) =$  μεταθέσεις συντηκτικών  $P(S, S) = S!$

15) Συνδυασμοί η στοιχείων από S (δεν βασίζονται διαφορά η διατάξη)  
 $\binom{S}{n} = \frac{S!}{n! (S-n)!}$

16) (Ποσ/κο's κανόνας) Αν  $E_1, E_2, \dots, E_n$  γεγονότα τότε

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = P(E_1) P(E_2/E_1) P(E_3/E_1 \cap E_2) \dots P(E_n/E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{n-1})$$

17) Αν  $E_1, E_2, \dots, E_n$  ανεξάρτητα τότε:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot \dots \cdot P(E_n)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

**ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ Σ.Μ.Π (συνάρτηση πυκνότητας)**

1) Αθροιστική συνάρτηση κατανομής

$$F_X(\alpha) = P(X \leq \alpha) = \sum_{\{x_i: x_i \leq \alpha\}} p(x_i)$$

Ιδιότητες

α)  $F(-\infty) = 0$  β)  $F(+\infty) = 1$  γ)  $F$  πρώτα θα είναι κατασκευασμένη από δεξιά  
 $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} F(x) = F(\alpha)$  δ)  $P(\alpha < X \leq b) = F_X(b) - F_X(\alpha)$

2) Μέση τιμή ή μαθηματική επένδυση  $E(X) = \sum_{\{x: p(x) > 0\}} x \cdot p(x)$

Ιδιότητες

α)  $E(b) = b$  β)  $E(ax+b) = aE(x) + b$

**ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ**

$Var(X) = V(X)$   $V(X) = E(X - \mu)^2 = E(X - E(X))^2$   $\mu = E(X)$   
**[ΣΟΦ]**  $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$  !!!

Ιδιότητες

i)  $V(b) = 0$  ii)  $V(ax+b) = a^2 V(X)$  !!!

**ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ**

$$SD = \sqrt{V(X)}$$

Εξ' ου  $Var(ax+b) = a^2 Var(x)$  από α

$$SD = \sqrt{V(X)} = |a| \cdot \sqrt{V(X)}$$