

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

1) Δοχεία περιέχουν σφαιρίδια (διακριτά αριθμημένα)
Εκτείνω ή γορές το π.τ.

$N_n(i)$ = είναι η συχνότητα εμφάνισης του σφαιριδίου i
όταν εκτείνω ή γορές το π.τ.

π.τ.

$N_{20}(1) = 5$, Είχαμε στο π.τ. 20 γορές και εμφανίστηκε
στο 1 5 γορές

2) Οπ. συχνότητα το 1 είναι $\frac{N_{20}(1)}{20} = \frac{5}{20} = 0,25$

$\Omega = \{ \omega : \omega = \text{ενδεχόμενο π.τ.} \}$ δειγματοχώρος (Ω)
 ω αληθ. ενδεχόμενο

$\mathcal{F} = \{ \omega \in \Omega : \omega \text{ ικανοποιούν μερ. ιδιότητα} \}$
 $|\mathcal{F}| = \text{πληθ. στοιχείων του } \mathcal{F}$

Το π.τ. ρίχνω 6 φορές τότε το Ω έχει

$$|\Omega| = 6^6 = 46.656.$$

3) $\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_S \}$ όπου $\omega_k = \text{ενδεχόμενο επιτυχίας}$
 k -οβτού σφαιριδίου
από το δοχείο.

τότε $|\Omega| = S$ ορίζουμε $p(\omega_k) = \frac{1}{S}$

4) Έστω $A = \{ \omega_k \in \Omega : \omega_k \text{ κόκκινο σφαιρίδιο} \}$

$A = \{ 1, 2, \dots, c \} \subseteq \Omega$ $|A| = c$

τότε $p(\text{κόκκινο σφαιρίδιο}) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{c}{S}$

5) ΟΡΙΣΜΟΣ Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου δίνεται ως ο λόγος των ευνοϊκών περιπτώσεων για το συγκεκριμένο ενδεχόμενο προς τον συνολικό αριθμό των περιπτώσεων, υπό την προϋπόθεση κάθε «από ενδεχόμενο» έχει την ίδια πιθανότητα εμφάνισης $\frac{1}{10}$

$$P \subseteq 0$$

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|}$$

$$w \in A \cup B \Rightarrow w \in A \text{ ή } w \in B$$

$$w \in A \cap B \Rightarrow w \in A \text{ και } w \in B$$

$$w \in A \Rightarrow w \notin A \text{ (δεν συμβαίνει)}$$

π.χ.

$$\Omega = \{(K, \Gamma), (K, K), (\Gamma, K), (\Gamma, \sigma)\}$$

$$B = \{(K, \sigma), (K, K)\}$$

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{2}{4} = 0,5$$

ή

$$P(B) = P(w_1 \cup w_2) = P(w_1) + P(w_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = 0,5$$

ΠΑΝΟΣ ΣΑΡΑΚΗΝΟΣ

5) Αξιοματικός ορισμός πιθανοτήτων

Σχ. 6. $\mathcal{A} = \{ \text{σύνολο όλων των υποσυνόλων του } \Omega \text{ που επιθυμούμε να ορίσουμε πιθανότητα} \}$

Θέλουμε ένα σύνολο $\mathcal{A}$ που ικανοποιεί τα παρακάτω:

i) $\Omega \in \mathcal{A}$

ii) $\text{αν } A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

iii) $\text{αν } A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A} \text{ και } \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$

π.χ. 1) $\Omega = \{1, 2, \dots, 5\}$

$$\mathcal{A} = \{ \Omega, \emptyset, \{1\}, \dots, \{5\}, \{1, 2\}, \dots \}$$

$$|\mathcal{A}| = 2^{|\Omega|}$$

2) Π/γ 2 νομίσματα $\Omega = \{KK, KT, TK, TT\}$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\Omega) = \{ \Omega, \emptyset, \{KK\}, \dots \}$$

$$|\mathcal{A}(\Omega)| = 2^4$$

Κ. 2. 7

ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Ένα μέτρο πιθανότητας $P()$ πάνω στα σύνολα του $\mathcal{A}$ ορίζεται μία συνάρτηση με π.ο. τα σύνολα του $\mathcal{A}$ και σύνολο τιμών τους πραγματικούς αριθμούς και η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

$$i) P(\emptyset) = 0$$

$$ii) P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

iii) Αν $A_1, A_2, \dots, A_n$ σύνολα τέτοια ώστε

$$A_i \in \mathcal{A} \quad i=1, 2, \dots, n \quad \text{και} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{για} \quad i \neq j \quad i, j=1, 2, \dots, n$$

$$\text{τότε} \quad P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ είναι

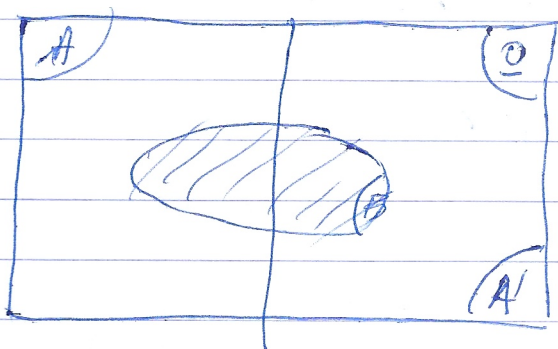
το σύνολο Ω ο χώρος $\mathcal{A}$ και το μέτρο

πιθανότητας που ορίζεται πάνω στα σύνολα του $\mathcal{A}$

(23)

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ χώρος πιθανότητας στην συνεχεία
προσθέτουμε ότι όλα τα γεγονότα που περιγράφονται
ανήκουν στο $\mathcal{A}$ είναι δηλαδή ενδεχόμενα.



$$B = (A \cap B) \cup (A' \cap B) \quad (1)$$

Αποδ/

$$A \cup A' = \Omega \text{ επομένως } B = \Omega \cap B = (A \cup A') \cap B = (A \cap B) \cup (A' \cap B)$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B) \quad (2)$$

Αποδ/

Προσoinwς από το ότι $A \cap B, A' \cap B$ είναι γεγονότα μετρώσιμα
τότε από την 3^η ιδιότητα του ορισμού και βοήθεια του
① προκύπτει η ②.

$$P(A') = 1 - P(A) \quad (3)$$

Αποδ/

$$P(\Omega) = 1 \Leftrightarrow P(A \cup A') = 1 \Leftrightarrow P(A) + P(A') = 1 \Leftrightarrow P(A') = 1 - P(A)$$

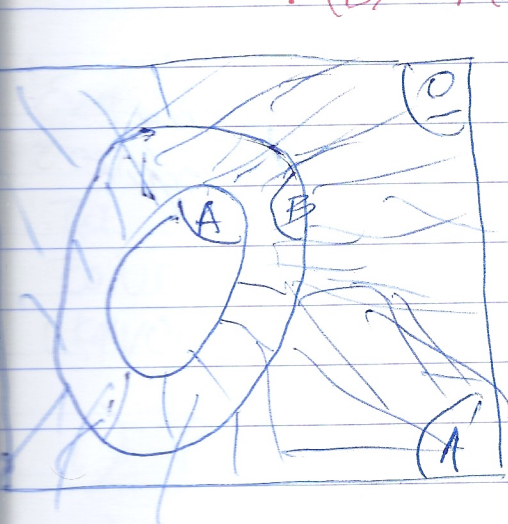
A', A γεγονότα μετρώσιμα

$$P(\emptyset) = 0 \quad (4)$$

Αποδ/ $\Omega' = \emptyset$ άρα $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$

Αν $A \subseteq B$ τότε

$$P(B) = P(A) + P(A' \cap B) \quad (5)$$



Από (5) $A \subseteq B$ έχω $A \cap B = A$
από (5) έχω

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(A' \cap B) = \\ &= P(A) + P(A' \cap B) \end{aligned}$$

Αν $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B) \quad (6)$

Από (5)

$$P(A \cap B) \geq 0 \text{ από (5) } P(A) \leq P(B)$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ DE MORGAN

Αν $A_i \quad i=1, 2, \dots, n$ είναι μία ακολουθία γεγονότων
τότε:

$$\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)' = \left(\bigcap_{i=1}^n A_i' \right) \quad (7)$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right)' = \left(\bigcup_{i=1}^n A_i' \right) \quad (8)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i'\right) \quad (9)$$

Από (7)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - P\left[\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)'\right] = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i'\right)$$

Παρατήρηση. Η (9) μας λέει ότι η πιθανότητα
τουλάχιστον 1 από τα γεγονότα A_i συμβεί είναι ίση
με 1 μείον την πιθανότητα κανένα από τα
 n γεγονότα έχουν συμβεί.

Παράδειγμα Ρίγης 3 ισορροπημένων και πανομοιότυπων νομίσματων. Υπολογίστε την πιθανότητα ένα τουλάχιστον να είναι k .

Λύση

Υπάρχουν $2^3 = 8$ αποτελέσματα και κάθε ενδεχόμενο έχει πιθανότητα $\frac{1}{8}$.

Έστω A_i το 1-οστό νόμισμα που βέρει k
 $i = 1, 2, 3$

Ζητείται $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ αφού $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{\Gamma, \Gamma, \Gamma\}$

$$P(\Gamma, \Gamma, \Gamma) = \frac{1}{8} \quad \text{άρα} \quad P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Παρατήρηση Από την $3^{\text{η}}$ ιδιότητα του αριθμού αν A, B είναι μετρώσιμους τότε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Αν A, B δεν είναι μετρώσιμους ($A \cap B \neq \emptyset$) τότε

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (10)$$

Επίσης

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) \quad (11)$$

_____ είναι μετρώσιμους

Απόδ 10/

$$A \cup B = (A \cap B') \cup (A \cap B) \cup (B \cap A')$$

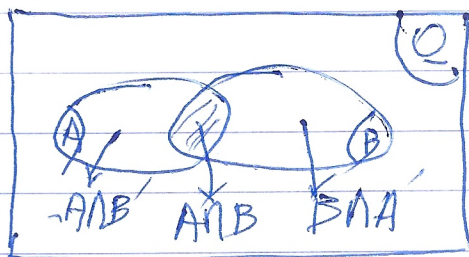
άρα

$$P(A \cup B) = P(A \cap B') + P(A \cap B) + P(B \cap A') \quad (12)$$

Από την (9) έχουμε

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$



(12) με αντικατάσταση έχω:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(20)

ΠΑΝΟΣ ΣΑΡΑΚΗΝΟΣ

Παρατήρηση: Οι (10) και (11) μπορούν να
γενικευθούν σε η σύνολα. δηλαδή:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)$$

και

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i) \quad (13)$$

Απόδειξη (με επαγωγή)

ΠΑΝΟΣ ΣΑΡΑΚΗΝΟΣ

ΠΑΝΟΣ
30 Οκτ 2017

ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω A, B 2 ενδεχόμενα έτσι ώστε $P(A) > 0$. Τότε η δεσμευμένη πιθανότητα του B δοθέντος του A και συμβ $P(B/A)$ ορίζεται ως:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (17)$$

Αν $P(A) = 0$ τότε το $P(B/A)$ δεν ορίζεται

Ερμηνεία της δεσμευμένης πιθανότητας με
εφαρμογές συχνότητες

Έστω ότι επιλέγω π.τ. η φορές ($n \rightarrow +\infty$)

$N_n(A)$ = αριθμός συμβάντων στις n φορές του ενδ. A

$N_n(B)$ = $\gg \gg \gg \gg \gg \gg \gg \gg B$

$N_n(A \cap B)$ = $\gg \gg \gg \gg \gg \gg \gg \gg A \cap B$

$$\begin{array}{ccc} \text{Τότε} & \frac{N_n(A)}{n} & , \frac{N_n(B)}{n} & , \frac{N_n(A \cap B)}{n} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & P(A) & P(B) & P(A \cap B) \end{array}$$

$N_n(A \cap B)$ = από τις φορές που εμφανίστηκε το A
πόσες φορές εμφανίστηκε το B

ήρα ο λόγος $\frac{N_n(A \cap B)}{N_n(A)}$ είναι η αναλογία φορές

εμφάνισης του B ως προς αυτές που εμφανίστη-
κε το A . Άρα

$$\frac{N_n(A \cap B)}{N_n(A)} = \frac{\frac{N_n(A \cap B)}{n}}{\frac{N_n(A)}{n}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B/A)$$

Παράδειγμα. Έστω δοχείο το οποίο περιέχει c κόκκινα
 χαρτιά και b μαύρα χαρτιά.
 Πιθανότητα επιλογής κάθε χαρτιού είναι $\frac{1}{b+c}$

Ερώτηση: Αν το επιλεγόμενο χαρτί είναι κόκκινο, ποια είναι η πιθανότητα να είναι
 με επίστα 1;
 ενδεχόμενα:

A = κόκκινο χαρτί

B = το χαρτί να έχει επίστα 1

Ζητάω
$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{b+c}}{\frac{c}{b+c}} = \frac{1}{c}$$

ενώ
$$P(B) = \frac{2}{b+c}$$

Ασκ 2 Παράδειγμα 5.4.2 (SOS)*

Πίση από 2 πανομοιότυπων νομισμάτων υπολογίστε

- Την δεδομένη πιθανότητα ότι και τα 2 ενδεχόμενα
 δείχνουν K δεδομένου ότι το πρώτο δείχνει K .
- Την δεδομένη πιθανότητα ότι και τα 2
 δείχνουν K δεδομένου ότι τουλάχιστον ένα
 δείχνει K .

Λύση

$$\Omega = \{KK, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ\}$$

$$P(\omega_i) = \frac{1}{4} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$A = \omega$ 1ο νόμισμα φέρνει K
 $B = \omega$ 2ο $\Rightarrow K$

(29)

α) Ζητούμε: $P(A \cap B / A) = \frac{P(A \cap B \cap A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

β) Ζητούμε: $P(A \cap B / A \cup B) = \frac{P[(A \cap B) \cap (A \cup B)]}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} =$
 $= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$

Ποσοδείγμα 5.4.3 | SOS*

Ο πληθυσμός μιας πόλης αποτελείται από:
40% άνδρες (A) → 50% καπνίζουν
60% γυναίκες (B) → 30% >>

Βρείτε την πιθανότητα ενός καπνιστή να είναι άνδρας.

Λύση

A: να είναι άνδρας

B: >> >> γυναίκα

S: να καπνίζει

N: να μην καπνίζει

$$P(S/A) = 0,5$$

$$P(A) = 0,4$$

$$P(S/B) = 0,3$$

$$P(B) = 0,6$$

Ζητούμε $P(A/S) = ?$

$$\text{Απόγ. } P(A/S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{P(S/A) \cdot P(A)}{P(S)} = \frac{0,5 \cdot 0,4}{0,38}$$

$$S = (S \cap A) \cup (S \cap \bar{A}) \text{ από}$$

$$P(S) = P(S \cap A) + P(S \cap \bar{A})$$

$$P(S \cap A) = P(S/A) \cdot P(A) = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2$$

$$P(S \cap \bar{A}) = P(S/\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18$$

$$\text{από } P(S) = 0,20 + 0,18 = 0,38$$

$$\text{από } P(A/S) = \frac{0,5 \cdot 0,4}{0,38} = \frac{0,20}{0,38} = \frac{20}{38} = 0,53$$

ΠΑΝΟΣ ΣΑΡΑΚΗΝΟΣ

ΠΑΝΟΣ
30 Οκτ 2017

ΤΥΠΟΣ BAYES

Έστω $A_1, A_2, \dots, A_n$ η ξένα μεταξύ τους
ενδεχόμενα με $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$

Έστω B ενδεχόμενο με $P(B) > 0$ και υποθέτουμε
ότι $P(B/A_k)$ και $P(A_k)$ είναι γνωστές προαποφασισμένες
για $1 \leq k \leq n$.

Ζητείται η $P(A_i/B)$ $i=1, 2, \dots, n$

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^n [P(A_k) \cdot P(B/A_k)]} \quad (18)$$

(ΤΥΠΟΣ BAYES)

Απόδ/

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) = \bigcup_{k=1}^n (B \cap A_k)$$

$$P(B) = P\left[\bigcup_{k=1}^n (B \cap A_k)\right] = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)$$

$$= P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) + \dots + P(B/A_n) \cdot P(A_n)$$

$$= \sum_{k=1}^n [P(B/A_k) \cdot P(A_k)]$$

$$\text{Επομένως } P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^n [P(B/A_k) \cdot P(A_k)]}$$

ΑΣΚ 11 Παράδειγμα 5.4.9.1

Έχουμε 3 θυροτηριέρες με 2 θυράκια η κάθε μία.
 Η 1^η θυροτηριέρα έχει ένα χρυσό σε κάθε θυράκι
 Η 2^η >> >> >> >> και ένα ασημένιο
 Η 3^η >> >> >> ασημένιο και ασημένιο

Επιλέγουμε στην τύχη θυροτηριέρα και ανοίγουμε ένα θυράκι.

Αν το θυράκι περιέχει ένα χρυσό νόμισμα ποια είναι η πιθανότητα ότι και το άλλο έχει χρυσό νόμισμα;

Λύση
 Έστω $A_i =$ «06^η θυροτηριέρα $i=1, 2, 3$
 Τα A_i είναι γενικά μεταξύ τους & Ε
 $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ $P(A_i) = \frac{1}{3}$

$B =$ το παρατηρηθέν νόμισμα είναι χρυσό

$$P(B/A_1) = 1 \quad P(B/A_2) = \frac{1}{2} \quad , \quad P(B/A_3) = 0$$

Ζητάω στο δεύτερο θυράκι να έχω ένα χρυσό, δεδομένου ότι στο πρώτο θυράκι έχω χρυσό. Δηλαδή ζητάω $P(A_1/B)$

Εφαρμόζω τον κανόνα Bayes

$$P(A_1/B) = \frac{P(B/A_1) \cdot P(A_1)}{\sum_{k=1}^3 [P(B/A_k) \cdot P(A_k)]} =$$

$$= \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{6}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} //$$

ΠΑΝΟΣ ΣΑΡΑΚΗΝΟΣ

ΕΝΝΟΙΑ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑΣ

Έχουμε ένα δοχείο με 4 σφαίριδια διακριτά
1, 2, 3, 4
Επιλογή σφαίριδιού με τις ακόλουθες πιθανότητες
επιλογής.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\} \quad P(i) = \frac{1}{4} \quad i=1, 2, 3, 4$$

Έστω A, B 2 ενδεχόμενα
για ορισμένες επιλογές των A και B
γνώση ότι το A συνεβν αυξάνονται τα
πρόβωτα ότι συνεβν το B .
π.χ. α) $A = \{1, 2\}$ $B = \{1\}$ τότε $P(A) = \frac{1}{2}$ $P(B) = \frac{1}{4}$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} \text{ βλεπώς.}$$

$$P(B/A) = \frac{1}{2} > P(B) = \frac{1}{4}$$

$$\text{β) } A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 3, 4\}$$

$$P(A) = \frac{3}{4} \quad P(B) = \frac{3}{4} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{2}$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} < P(B) = \frac{3}{4}$$

Μια ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι όταν η γνώση του A δεν αλλάξει το ποσοστό αν συμβεί το B .

π.χ $A = \{1, 2\}$ $B = \{1, 3\}$ τότε

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = P(B)$$

Δεχόμενος όπως αυτό που η δεξμενική πιθανότητα είναι ίδια με την μη δεξμενική, υπάρχουν ανεξαρτησία.

Πιο γενικά αν A, B 2 ενδιαφέροντα ορισμένα σ' ένα χώρο πιθανότητας με $P(A) \neq 0$

Τότε ορίζουμε ότι τα A και B είναι ανεξαρτησία

$$\text{αν} \quad P(B/A) = P(B)$$

Προσέγγιση Αν A, B ανεξαρτησία τότε

$$P(B/A) = P(B) \Leftrightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(B) \Leftrightarrow$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Άρα από αυτό δίνουμε τον εμψ ορισμό

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.5.1.

Δύο γεγονότα A, B είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους αν και μόνον αν

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (19)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.5.2.

Τρία ενδεχόμενα A, B, C είναι ανεξάρτητα αν είναι ανεξάρτητα ανά δύο και επιπλέον

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ο τίτλος (19) ισχύει και αν ακόμα $P(A) = 0$ και επίσης είναι συμβεβημένος ως προς A, B .

ΠΑΝΟΣ ΣΑΡΑΚΗΝΟΣ

ΠΑΝΟΣ

30 Οκτ 2017