

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

6.1. Διατεταγμένα δείγματα (ordered subject)

Έστω 2 σύνολα S, T
 Αν το S έχει n διακριτά στοιχεία $s_1, s_2, \dots, s_n$
 και το T m $\Rightarrow$ $t_1, t_2, \dots, t_m$
 Τότε ο αριθμός των ζευγών (s_i, t_j) που
 μπορούν να σχηματιστούν αν λάβουμε ένα στοιχείο
 από το S και ένα από το T είναι $n \times m$
 π.χ. $S = \{1, 2\}$, $T = \{1, 2, 3\}$ τότε υπάρχουν 6 ζεύγη.
 Γενικότερα

Αν έχω n σύνολα $S_1, S_2, \dots, S_n$ με
 ~~$|S_i| = s_i$~~ $|S_i| = s_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$ τότε
 ο αριθμός των διατεταγμένων n -αδών
 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ με $x_i \in S_i \quad i = 1, 2, \dots, n$ είναι:
 $s_1 \cdot s_2 \cdot \dots \cdot s_n$

Ειδική περίπτωση

Αν $|S_i| = s \quad i = 1, 2, \dots, n$ τότε υπάρχουν s^n
 n -άδες στοιχείων $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ με $x_i \in S_i$
 π.χ. $S = \{1, 2\} \quad n = 3$ έχω 2^3 διακριτές 3-άδες
 16 αδα

$$|S^n| = |S|^n$$

- Έστω τώρα δείγμα με S διακριτά στοιχεία
 διακρίβια με αριθμούς $1, 2, \dots, S$
 Θα έχω διακρίβια ματαχρώ τον αριθμό του
 και επακτοποθετώ. (δείγματα) για με επανέλεγχ
 Εμπέσω το π.τ. n φορές και καταγράψω
 μια n -άδα $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ όπου x_i το

αποτελέσματα της i -οστής δοκιμής.
 Το ενδεχόμενο καλείται $\ll$ δείγμα μεγέθους n από ένα πηγαίο με s διακριτά αποτελέσματα $\gg$
 Αν όλα τα δυνατά δείγματα s^n έχουν την ίδια πιθανότητα εμφάνισης τότε λέγεται $\ll$ τυχαία δειγματοληψία με επανάθεση $\gg$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.1.3

Ένα δικαίο νομίσμα ρίχνεται n φορές.
 Βρείτε την πιθανότητα όσον εμφανίζεται τουλάχιστον μία κορώνα.

Πύση

Η αντιστοίχια νομίσματος η φορές ισοδυναμεί με την επιλογή τυχαίου δείγματος μεγέθους n , με επανάθεση, από το σύνολο $\{K, \sigma\}$
 άρα κάθε n -άδα $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ με $x_i \in \{K, \sigma\}$ έχει την ίδια πιθανότητα εμφάνισης $\frac{1}{2^n}$ άρα

$$P(n\text{-άδα}) = \frac{1}{2^n}$$

Έστω $A =$ τουλάχιστον 1 κορώνα

$A_i = i$ -οστή δοκιμή εμφανίζεται K (κορώνα)

$$A = \bigcup_{i=1}^n A_i \quad P(A) = 1 - P(A') = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i'\right) =$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i'\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i') = \frac{1}{2^n}$$

(όλες οι δοκιμές έφεραν σ)

ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ ΧΩΡΙΣ ΕΠΑΝΑΘΕΣΗ

Σ σύνολο με S στοιχεία
 Επιλογή στοιχείων από το S παρατήρηση του αριθμού
 και μη επανατοποθέτηση στο σύνολο (π.χ. γόστο)
 Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία επιλέγοντας ένα από
 το $S-1$ εναπομείνοντα αντικείμενα.
 Έστω ότι η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να
 επιλεγθούν n αντικείμενα. Προφανώς $n \leq S$
 Και σε αυτή την περίπτωση έχουμε n -άδες
 με την διαφορά όμως ότι όλα τα αντικείμενα
 είναι διακριτά

1^ο αντικείμενο επιλέγεται με S τρόπους
 2^ο $\gg \gg$ με $S-1$ $\gg$

$n^{\text{ο}}$ $\gg \gg$ με $S-(n-1) \gg$
 άρα συνολικά υπάρχουν $S \cdot (S-1) \cdots (S-n+1)$ τρόποι
 να επιλέξουμε n αντικείμενα από τα S
 συνολ. $(S)_n$ ή $P(S, n)$
 Αν υποτεθείμε μία από τις $P(S, n)$ διατάξεις
 είναι βολικό να πούμε $P(\{S\}, n) = \frac{1}{P(S, n)}$ τότε

η διαδικασία παύεται $\Leftarrow$ επιλογή τυχαίου δείγματος
 μέθους n από πληθυσμό S αντικείμενων χωρίς
 επανάθεση $\gg$

Ειδική περίπτωση $S=n$

τότε $P(S, S) = S!$

π.χ. Έχεις ένα πληθυσμό S αντικείμενων.

Επιλογή n αντικείμενων με επανατοποθέτηση

Υπολογίστε την πιθανότητα να είναι ο αριθμός δεν
 παρουσιάζεται 2 φορές

Λύση $P(1) = \frac{P(S, n)}{S^n} = \frac{S(S-1)(S-2)\dots(S-n+1)}{\underbrace{S \cdot S \cdot S \dots S}_{n \text{ φορές}}} =$
 $= (1 - \frac{1}{S})(1 - \frac{2}{S}) \dots (1 - \frac{n-1}{S})$

Προβλέπεται ~~για~~ γενεθλίων
 6.1.7

Εύρω ότι τα γενέθλια ενός ανθρώπου έχουν την ίδια ημέρα να γυρνούν σε 365 μέρες.

Βρείτε την πιθανότητα σε μια ομάδα η ανθρωπότητα να υπάρχουν 2 άνθρωποι με κοινά γενέθλια

Λύση

Υπόθεση $n < 365$. Εφαρμογή του πύθω $S = 365$
 $P = (1 - \frac{1}{365})(1 - \frac{2}{365}) \dots (1 - \frac{n-1}{365})$

ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ

ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ

Με πόσους τρόπους μπορούμε να κατανέμουμε s βραβίδια σε s δοχεία έτσι ώστε κάθε δοχείο να περιέχει ένα βραβίδιο.

Απάντηση:

$$s(s-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = s!$$

Το ανωτέρω πρόβλημα αντιστοιχεί με τον αριθμό των μεταθέσεων s αντικειμένων (διακριτών)

Σε μια πιο γενική κατάσταση αν ο αριθμός των δοχείων είναι n ~~ή~~ s το πρώτο είναι ~~πάλι~~ με πόσους τρόπους τοποθετείται η βραβίδια σε n ή δοχεία, επιπλέον από s βραβίδια που σε ένα βραβίδιο ανά δοχείο

Απάντηση:

$$s(s-1) \dots (s-n+1) = \frac{s!}{(s-n)!}$$

Άρα ισοδύναμα:

Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε n βραβίδια από s όταν μας ενδιαφέρει η σειρά στο δείγμα.

Απάντηση:

$$P(s, n)$$

ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ (Combination)

(Μη διατεταγμένα σύνολα)

Παράδειγμα 6.2.1.

5 φύλλα επιλέγονται από μια τράπουλα 52 φύλλων σύμφωνα με το προηγούμενο κεφάλαιο θα έχουμε

$$\binom{52}{5} = P(52, 5) = \frac{52!}{(52-5)!} \text{ τρόποι}$$

επιλογές των 5 φύλλων.

Αλλά π.χ. η διάταξη 2, 3, 4, 5, 6 θεωρείται ίδια με την 2, 4, 3, 6, 5

Συνεπώς για κάθε ένα σύνολο 5 φύλλων

π.χ. 2, 3, 4, 5, 6 υπάρχουν 5! μεταθέσεις π.χ.

Αρα ο αριθμός των δυνατών συνδυασμών στο πόκερ είναι:

$$\frac{P(52, 5)}{5!} = \frac{52!}{5!(52-5)!}$$

ΓΕΝΙΚΑ

Έστω σύνολο S με S διαμερίσιμα αντικείμενα όπως γνωρίζουμε υπάρχουν $P(S, z)$ διαμερίσιμα

δείγματα μεγέθους z , αντικείμενων επιλεγμένα

χωρίς επανάθεση από τα S αντικείμενα

Κάθε διαμερίσιμο υποσύνολο $(x_1, x_2, \dots, x_z)$ μπορεί να επαναδιαταχθεί με $z!$

Αν επιλέξουμε να αγνοήσουμε την διάταξη που τα αντικείμενα εμφανίζονται στο δείγμα τότε η $z!$ επαναδιατάξεις θεωρούνται σαν μία.

Αρα υπάρχουν

$$\frac{P(S, z)}{z!} \text{ διαφορετικά}$$

δείγματα μεγέθους z από τα S αντικείμενα.

που μπορούν να επιλεγούν χωρίς επαναφορές
και χωρίς να παίζει ρόλο η σειρά επιλογής.

$$\text{Συνδυασμός} \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!}$$

(Είναι το παράδειγμα 6.2.2)

ΑΕΚ 13 | Παράδειγμα 6.2.3 (SOS)

Το τμήμα οικονομικών επιτελών έχει 25 τακτικούς
καθηγούμενους, 15 αναπληρωτές, 35 επίκουρους.

Μια επιτροπή 6 ατόμων επιλέγεται στην τύχη
από το τμήμα.

Βρείτε την πιθανότητα όλα τα μέλη της
επιτροπής να είναι επίκουροι.

Λύση

Υπάρχουν 75 μέλη στο τμήμα άρα
υπάρχουν $\binom{75}{6}$ τρόποι να σχηματίσουμε μια

επιτροπή

Υπάρχουν 35 επίκουροι καθηγούμενοι και οι
6 από αυτούς που είναι στην επιτροπή μπορούν
να επιλεγούν $\binom{35}{6}$ άρα

$$p = \frac{\binom{35}{6}}{\binom{75}{6}} = \frac{35!}{6! \cdot 29!} \cdot \frac{75!}{6! \cdot 69!} = \frac{1.623.160}{201.359.550}$$

Ασκ 14 Παράδειγμα 6.2.4

Έχουμε 5 ρύπων. Ποιά η πιθανότητα να βγει καρτέ;

Λύση

Αριθμός δυνατών ισοτιμιών ενδεχομένων

$$|Ω| = \binom{52}{5} = 2.598.960$$

Υπάρχουν 13 επιλογές για το ρύπο της τειράδας
και 48 επιλογές για το 5^ο ρύπο
Άρα ευνοϊκές περιπτώσεις 13·48

$$P(\text{καρτέ}) = \frac{13 \cdot 48}{\binom{52}{5}} = \frac{624}{201.359.550} = 3,1 \cdot 10^{-6}$$

Ασκ 15 Έχουμε z κόκκινες b μπλες (SOS)

Επιλέγουμε χωρίς επανόρθωση η μπλέ.
Ποιά η πιθανότητα από τις η μπλέ
οι κ να είναι κόκκινες

$$P = \frac{\binom{z}{k} \cdot \binom{b}{n-k}}{\binom{z+b}{n}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 16 (6.2.5)

Πόσες 5 φύλλων, ποιά η πιθανότητα 2
πληθύνει από 52 φύλλα.

$$P = \frac{\binom{4}{2} \binom{48}{3}}{\binom{52}{5}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 17 Έστω ότι ένα δοχείο έχει 8 κόκκινα (R) και 4 λευκά (W) σφαίριδια

Επιλέγουμε 2 σφαίριδια από το δοχείο χωρίς επανασύσταση.

Ποιά η πιθανότητα να τα 2 σφαίριδια να είναι κόκκινα.
Λύση (1ος τρόπος)

$$P = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{4}{0}}{\binom{12}{2}} = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{28}{66} = \frac{14}{33}$$

(2ος τρόπος) Έστω R_1 και R_2 τα ενδεχόμενα ότι το 1ο και το 2ο επιλεγέν σφαίριδιο είναι (R) αντίστοιχα.
Ποθέντος ότι το 1ο σφαίριδιο είναι R μένουν 7 R και 4 W

Άρα

$$P(R_2/R_1) = \frac{7}{11} \quad P(R_1) = \frac{8}{12}$$

$$\text{απο } P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2/R_1) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} = \frac{14}{33} //$$

ΟΡΙΣΜΟΣ (Ποσ. / Γεγονός. υφ' όλης)Έστω $E_1, E_2, \dots, E_n$ γεγονότα ούτως

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = P(E_1) \cdot P(E_2/E_1) \cdot P(E_3/E_1 \cap E_2) \dots P(E_n/E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{n-1})$$

Απόδ. Επαναλαμβανόμενη χρήση του ορίσμου δεσμεύμας πιθανότητας

δγλ

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2/E_1) \quad (1)$$

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P[(E_1 \cap E_2) \cap E_3] = P(E_1 \cap E_2) \cdot P(E_3/E_1 \cap E_2) =$$

$$\stackrel{(1)}{=} P(E_1) \cdot P(E_2/E_1) \cdot P(E_3/E_1 \cap E_2)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Η. Αν $E_1, E_2, \dots, E_n$ ανεξαρτήτως

$$\text{ούτως} \quad P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot \dots \cdot P(E_n)$$

ΑΣΚ18/ Εφαρμογή 5.18 δελ. 163

Περιμένουμε 4 φορτγά' ηρώα (Φ) και 2
 πείρελαιόβωρα (Π). Ποιά η πιθανότητα τα δύο
 πρώτα που βδο έχουν να είναι:

(i) φορτγά

(ii) ίδιου τύπου

(iii) Ποιά η πιθανότητα το δεύτερο να είναι
 φορτγά

Αύβη

$$i) \quad P(\Phi_1 \Phi_2) = P(\Phi_1) \cdot P(\Phi_2/\Phi_1) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

$$ii) \quad P(\Phi_1 \Phi_2 \cup \Pi_1 \Pi_2) = P(\Phi_1 \Phi_2) + P(\Pi_1 \Pi_2) =$$

$$= P(\Phi_1) \cdot P(\Phi_2/\Phi_1) + P(\Pi_1) \cdot P(\Pi_2/\Pi_1) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$$

$$\begin{aligned}
 \text{iii) } P_{ZHT} &= P(\Phi_1 \Phi_2 \vee \Pi_1 \Phi_2) = P(\Phi_1) \cdot P(\Phi_2 / \Phi_1) + P(\Pi_1) \cdot P(\Phi_2 / \Pi_1) \\
 &= \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{30} + \frac{8}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Random - Variables - Τυχαίες μεταβλητές

Πολλές φορές στην επιτήρηση ενός π.τ. ενδιαφερόμαστε για μία συνάρτηση του αποτελέσματος, παρά το αποτέλεσμα αυτό καθ'αυτό.

Παράδειγμα 7.1.1.

Πίση 2 Ιαριών $\rightarrow$ μας ενδιαφέρει το άθροισμα

Παράδειγμα 7.1.2

Πίση νόμισματος η φορές $\rightarrow$ μας ενδιαφέρει ο συνολικός αριθμός από "κ"

Έστω $n=3$

Αν είναι y ο συνολικός αριθμός από "κ" που εμφανίζονται στις 3 πύες τότε το y είναι μία τυχαία μεταβλητή με $y \in \{0, 1, 2, 3\}$ και αντίστοιχες πιθανότητες

$$P(y=0) = P(\Gamma \Gamma \Gamma) = \frac{1}{8}$$

$$P(y=1) = P(\text{ΚΓΓ, ΓΚΓ, ΓΓΚ}) = \frac{3}{8}$$

$$P(y=2) = P(\text{ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ}) = \frac{3}{8}$$

$$P(y=3) = P(\text{ΚΚΚ}) = \frac{1}{8}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Το y επιφο' ως συνάρτηση $y(\Gamma\Gamma\Gamma)=0, y(\Gamma\kappa\Gamma)=1$
 7.1.7

* "Μεταφέρουμε" το ενδεχόμενο και τις πιθανότητες
 τους σε ένα υγιονόργιο "χώρο" που "ορίζεται" με y .

7.2 Discrete ~~Variables~~ Random Variables Διακριτές Τυχαιές μεταβλητές

ΟΡΙΣΜΟΣ 7.2.1

Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ χώρος πιθανότητας. Μια διακριτή
 τυχαία μεταβλητή, ορίζεται σε ένα χώρο
 πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ είναι μια συνάρτηση

$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ με η.ο. το δ.χ. Ω και ο καθ' ύλην
 ένα πεπερασμένο ή ένα αριθμητικό αριθμό
 σύνολο $\{x_1, x_2, \dots\} \subseteq \mathbb{R}$.

Στο παράδειγμα 7.1.2 το y είναι μια
 τυχαία μεταβλητή με

$$D_y: \Omega = \{(\kappa\kappa\kappa), (\kappa\kappa\Gamma), \dots, (\Gamma\Gamma\Gamma)\} \text{ και}$$

$$R_y: B = \{0, 1, 2, 3\}$$

Τα βήματα που ακολουθούμε είναι π.χ. στο 2
 είναι τα $(\kappa\kappa\Gamma), (\kappa\Gamma\kappa), (\Gamma\kappa\kappa)$

Ο τυχαίος αριθμός του y είναι μικρότερος του R_y .

Για μία τυχαία μεταβλητή X , ορίζουμε
 τη συνάρτηση πιθανότητας ή τη συνάρτηση
 πιθανότητας (β.μ.π) $p(x)$ της X
 (probability function, probability mass function)
 ως $p(x) = P(X=x) \forall x \in R_X$.

Αν $x \in \{x_1, x_2, \dots\}$ τότε

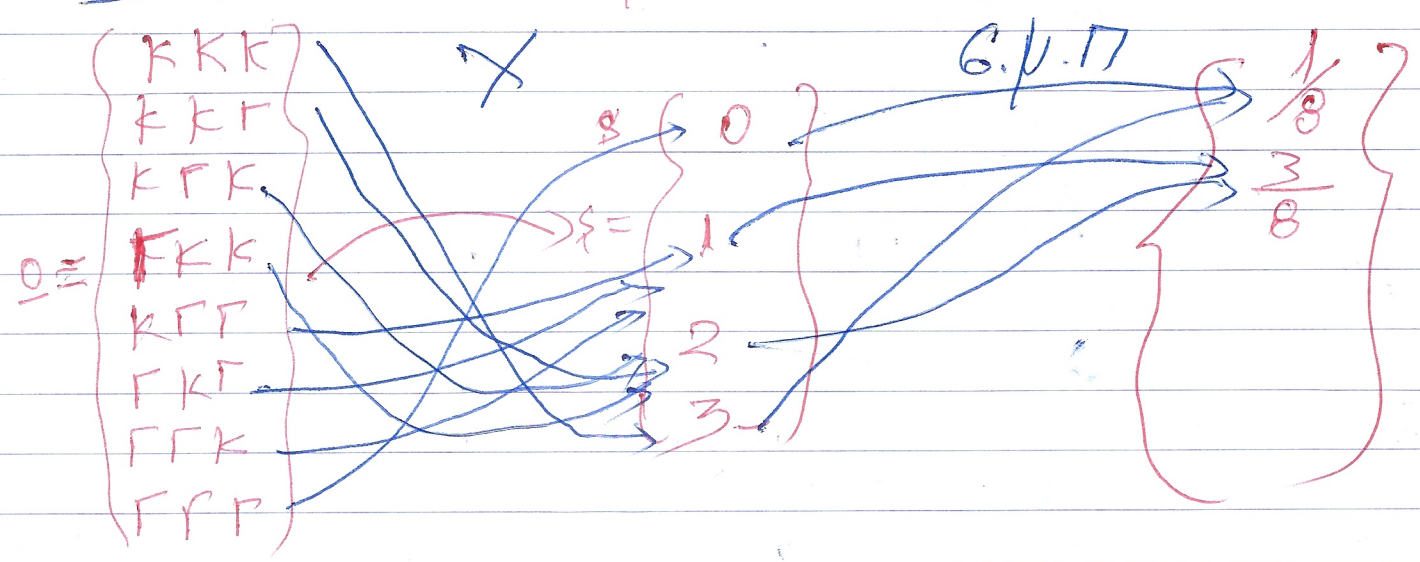
$$P(X=x_i) = P(x_i) \geq 0 \quad \forall i=1, 2, 3, \dots$$

Το σύνολο των δυνατών τιμών της X συμβολίζεται με S .

Επειδή το X λαμβάνει μία από τις τιμές $x_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n P(x_i) = \sum_{i=1}^n P(X=x_i) = 1$

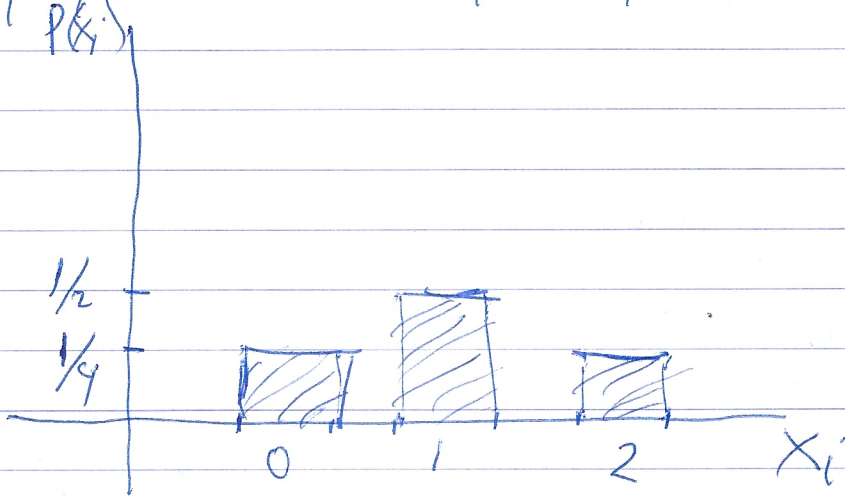
- Για να δείξω ότι μία συνάρτηση είναι β.μ.π.:
- 1. Βρίσκω ότι η συνάρτηση είναι μη αρνητική
 - 2. Βρίσκω ότι έχει ότι το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων είναι 1.

Επεξηγήστε συνάρτηση μάρκας πιθανότητας



Είναι πολλές φορές διαφωτιστικό η β.β.π να
δίνεται με έναν γραφικό τρόπο με το γράφημα
των x_i $P(x_i)$
π.χ αν $P(x_1=0)=\frac{1}{4}$, $P(x_2=1)=\frac{1}{2}$ $P(x_3=2)=\frac{1}{4}$

Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ραβδόγραμμα



Παρότρηση 7.2.2 Πίτυ & Γιαράν
 $y = x^{2016}$ Τάρ & Γιαράν
 η

$$X: \underline{0} \xrightarrow{y} S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$P(2) = P(y=2) = \frac{1}{36}$$

$$P(8) = \frac{5}{36}$$

$$P(3) = \frac{2}{36}$$

$$P(g) = \frac{4}{36}$$

$$P(4) = \frac{3}{36}$$

$$P(10) = \frac{3}{36}$$

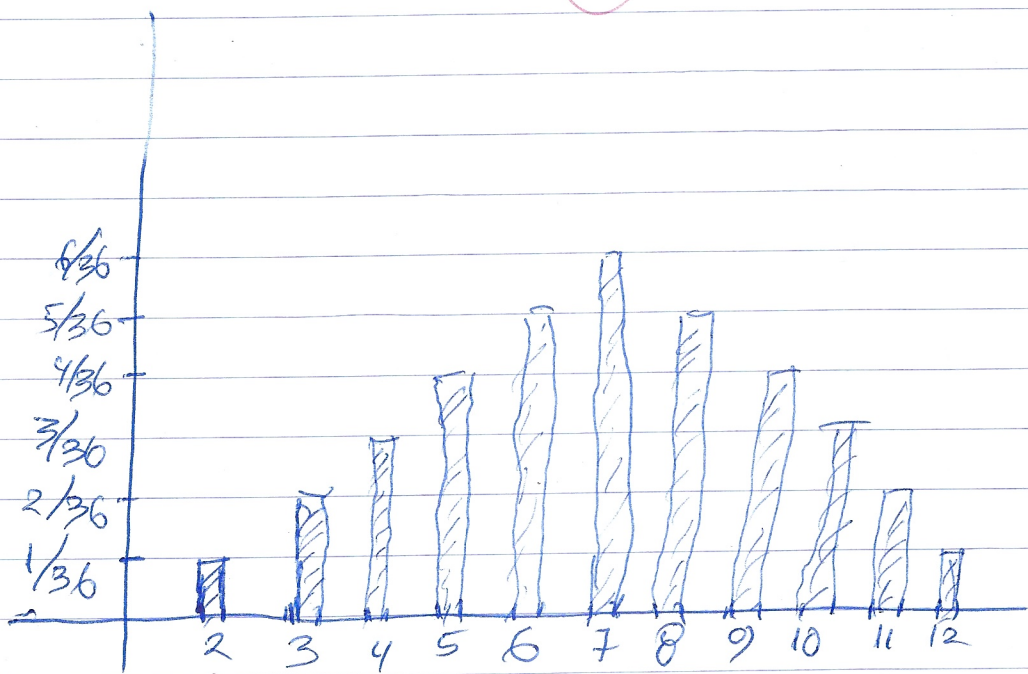
$$P(5) = \frac{4}{36}$$

$$P(11) = \frac{2}{36}$$

$$P(6) = \frac{5}{36}$$

$$P(12) = \frac{1}{36}$$

$$P(7) = \frac{6}{36}$$



ΑΣΚ 19 Παράδειγμα 7.2.3

Η συνάρτηση πιθανότητας της τυχράς μεταβλητής X δίνεται ως

$$P(i) = C \cdot \frac{1^i}{i!} \quad i=0,1,2,\dots \text{ και } i \geq 0$$

Αυτή η συνάρτηση είναι συνάρτηση μάζας πιθανότητας (β.β.π.)

Αποκτύει

$$\sum_{i=0}^{\infty} P(i) = C \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1^i}{i!} = 1 \quad \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x \right) \rightarrow C \cdot e^1 = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{e^1} = e^{-1}$$

άρα $P(i) = e^{-1} \cdot \frac{1^i}{i!} > 0 \quad \forall i=0,1,2,\dots$

Άρα είναι β.β.π.

α) Να βρεθούν $P(X=0)$ β) $P(X>2)$

Λύση

α) $P(X=0) = e^{-1} \cdot \frac{1^0}{0!} = e^{-1}$

β) $P(X>2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2)$

$$1 - e^{-2} - e^{-1} \cdot \frac{1}{1!} - e^{-2} \cdot \frac{1^2}{2!} = 1 - e^{-1} - 1 \cdot e^{-1} - e^{-1} \cdot \frac{1^2}{2}$$

$$= 1 - e^{-1} \left(1 + 1 + \frac{1^2}{2} \right)$$

ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ X

Είναι η συνάρτηση $F_X(x)$ $x \in \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{\{x_i : x_i \leq x\}} p(x = x_i)$$

Από τον ορισμό έχουμε

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ F

i) $F(-\infty) = 0$

ii) $F(+\infty) = 1$

iii) Η F είναι μία συνάρτηση συνεχώς από δεξιά δηλ

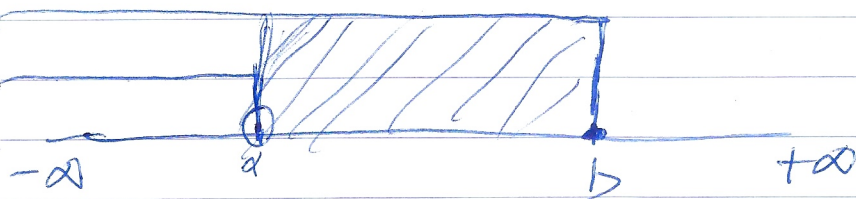
$$\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = F(a) \quad \text{ή γράφουμε}$$

Πρόταση
Απόδειξη

$$P(a < x \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

$$F_X(a) = P(X \leq a) = P(-\infty < X \leq a) = P[X \in (-\infty, a]]$$

$$F_X(b) = P(X \leq b) = P[X \in (-\infty, b]]$$



άρα $F_X(b) - F_X(a) = P[X \in (a, b]]$

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ Π. Έστω X μια τ.μ. με τιμές

$$\{x_1, x_2, x_3, \dots\} \text{ όπου } x_1 < x_2 < x_3 < \dots$$

Τότε η αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι μια βηματική συνάρτηση

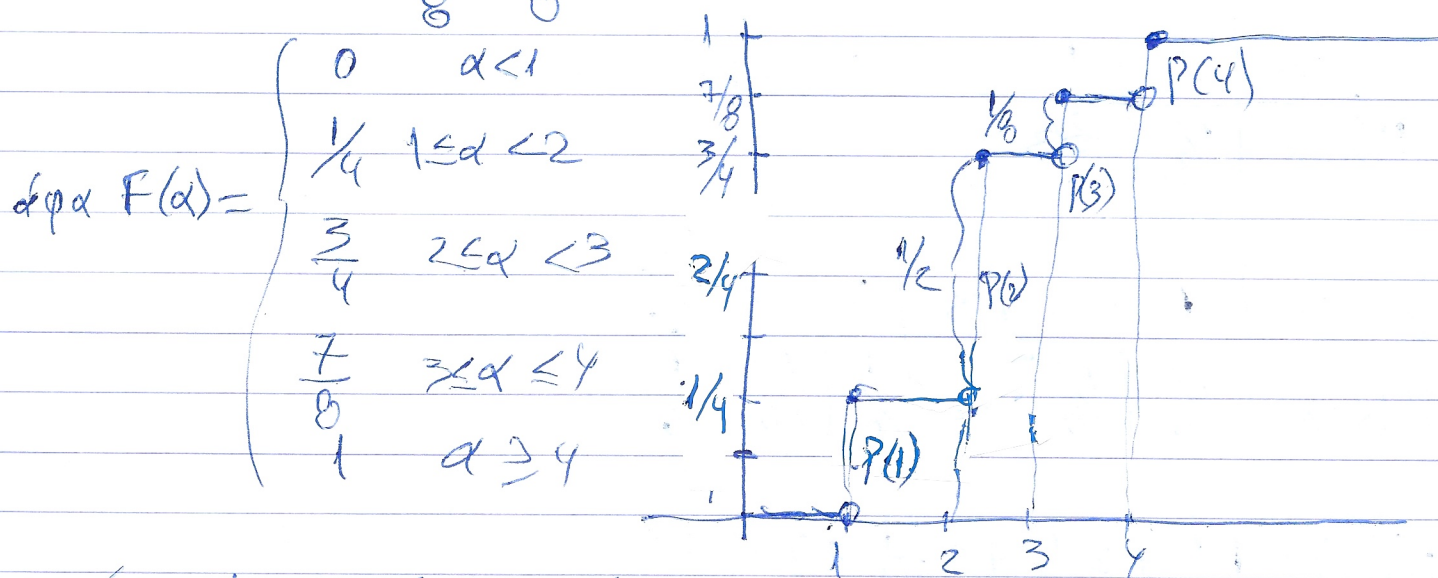


ΑΣΚ20 / Παράδειγμα 7.2.5

Η X είναι μια τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας $P(1)=\frac{1}{4}$ $P(2)=\frac{1}{2}$ $P(3)=\frac{1}{8}$ $P(4)=\frac{1}{8}$

Να βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής

- Για $\alpha < 1$ $F_X(\alpha) = P(X \leq \alpha) = \sum_{x \leq \alpha} p(x) = 0$
- Για $1 \leq \alpha < 2$ $F_X(\alpha) = P(X \leq \alpha) = \sum_{\{x \leq \alpha\}} p(x) = P(X=1) = \frac{1}{4}$
- Για $2 \leq \alpha < 3$ $F_X(\alpha) = P(X \leq \alpha) = \sum_{\{x \leq \alpha\}} p(x) = P(2) + P(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
- Για $3 \leq \alpha < 4$ $F_X(\alpha) = P(X \leq \alpha) = \sum_{\{x \leq \alpha\}} p(x) = P(3) + P(2) + P(1) = \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$
- Για $\alpha \geq 4$ $F_X(\alpha) = P(X \leq \alpha) = \sum_{\{x \leq \alpha\}} p(x) = P(4) + P(3) + P(2) + P(1) = \frac{7}{8} + \frac{1}{8} = 1$



Παρατήρηση Το μέγεθος κέρδους γίνεται στις τιμές 1, 2, 3, 4 ίσοι με την πιθανότητα παρατήρησης της τιμής.