(1)

ΆΣΚΗΣΗ 1 Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\left[e^x \int_0^x e^{-t} f(x-t)\,dt\right]' = e^{3x} + (x^3-2x^2-2x)\cdot e^x \quad (I)$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να μελετήσετε την f ως προς κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (-1,1)$: $e^2\cdot f'(x_1) - 2f'(x_2) = 7$

δ) $\forall\ a>0$ ν.δ.ο ισχύει $f(a)+f(3a) > 2f(2a)$

ε) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f την εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$.

Λύση

α) Υπολογισμός της παράστασης: $e^x\cdot\int_0^x e^{-t} f(x-t)\,dt =$

Θέτω $u=x-t$ $du=-dt$ για $\begin{cases} t=0 & u=x \\ t=x & u=0 \end{cases}$

$$= -e^x \int_x^0 e^{u-x} f(u)\,du = +e^x \int_0^x e^u e^{-x} f(u)\,du =$$

$$= e^x\cdot e^{-x} \int_0^x e^u f(u)\,du = \int_0^x e^u f(u)\,du$$

άρα η (I) γίνεται:

$$\left(\int_0^x e^u f(u)\,du\right)' = e^{3x} + (x^3-2x^2-2x)e^x \Leftrightarrow$$

$$e^x f(x) = e^{3x} + (x^3-2x^2-2x)\cdot e^x \quad \xleftrightarrow{:e^x}$$

$$\boxed{f(x) = e^{2x} + x^3 - 2x^2 - 2x}$$

β) $f'(x) = 2e^{2x} + 3x^2 - 4x - 2$

$f''(x) = 4e^{2x} + 6x - 4$

$f'''(x) = 8e^{2x} + 6 > 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$ άρα

η f'' ↗ στο $\mathbb{R}$

$$f'(0)=0$$

$$f''(0) = 4-4=0$$

άρα για $x<0 \overset{f''\uparrow}{\Longleftrightarrow} f''(x)<f''(0)=0 \Leftrightarrow f''(x)<0$

για $x>0 \overset{f''\uparrow}{\Longleftrightarrow} f''(x)>f''(0)=0 \Leftrightarrow f''(x)>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

ελαχ $f'(0)=0$

Άρα f κοίλη στο $(-\infty,0]$ και κυρτή στο $[0,+\infty)$

Επίσης η $f'(x)$ έχει ελάχιστο στο $x_0=0$ $f'(0)=0$
άρα $f'(x)>0$ $\forall x\in(-\infty,0)$ και $\forall x\in(0,+\infty)$
άρα η $f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$

γ) $-1 \quad x_1 \quad 0 \quad 1$

Εφαρμόζω Θ.Μ.Τ στο $[-1,0]$ άρα υπάρχει $x_1\in(-1,0)$:

$$f'(x_1)=\frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}=f(0)-f(-1)=1-\left(\frac{1}{e^2}-1-\cancel{2}+\cancel{2}\right)=2-\frac{1}{e^2}=\frac{2e^2-1}{e^2}$$

$$f'(x_2)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f(1)-f(0)=e^2+\cancel{1}-2-2-\cancel{1}=e^2-4$$

άρα $e^2 f'(x_1)=2e^2-1 \quad (1)$

$2f'(x_2)=2e^2-8 \quad (2)$

$$(1)-(2) \Rightarrow e^2 f'(x_1)-2f'(x_2)=7$$

δ) $0 \quad \alpha \quad \xi_1 \quad 2\alpha \quad \xi_2 \quad 3\alpha$

Εφαρμόζω Θ.Μ.Τ στο $[\alpha,2\alpha]$ $\quad f'(\xi_1)=\dfrac{f(2\alpha)-f(\alpha)}{\alpha}$

Θ.Μ.Τ στο $[2\alpha,3\alpha]$ $\quad f'(\xi_2)=\dfrac{f(3\alpha)-f(2\alpha)}{\alpha}$

$$0<\xi_1<\xi_2 \overset{f'\uparrow}{\Longleftrightarrow} f'(\xi_1)<f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(2\alpha)-f(\alpha)}{\alpha}<\frac{f(3\alpha)-f(2\alpha)}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow f(2\alpha)-f(\alpha)<f(3\alpha)-f(2\alpha) \Leftrightarrow 2f(2\alpha)<f(3\alpha)-f(\alpha)$$

ε) Βρίσκω την εξίσωση της εφαπτομένης στο $x_0=1$

$f(1)=e^2+1-2-2=e^2-3$

$f'(1)=2e^2+3-4-2=2e^2-3$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(1,e^2-3)$ είναι

$$y-e^2+3=(2e^2-3)(x-1) \Leftrightarrow y=2e^2x-2e^2-3x+\cancel{3}+e^2-\cancel{3}$$

$$y=(2e^2-3)x-e^2$$

Επειδή η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη στο $x_0=1$ άρα

$$E(\Omega)=\int_0^1[(e^{2x}+x^3-2x^2-2x)-((2e^2-3)x-e^2)]dx=$$

$$=\int_0^1(e^{2x}+x^3-2x^2-2x-2e^2x+3x+e^2)dx=$$

$$=\int_0^1(e^{2x}+x^3-2x^2+x-2e^2x+e^2)dx=$$

$$=\frac{1}{2}[e^{2x}]_0^1+\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1-2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-2e^2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+e^2[x]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}(e^2-1)+\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\cancel{\frac{2e^2}{2}}+\cancel{e^2}=$$

$$=\frac{1}{2}e^2-\cancel{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\cancel{\frac{1}{2}}=\frac{6e^2+3-8}{12}=\frac{6e^2-5}{12} \text{ τ.μ.}$$

Πάνος Ζαρακηνός