Λύσεις

1) Αφού $f \nearrow$ η f είναι 1-1 άρα είναι αντιστρέψιμη και επειδή $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ έχω $A_{f^{-1}}=\mathbb{R}$ δηλ $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Έστω τώρα ότι ισχύει $f(\alpha)=f^{-1}(\alpha)$ (I) για κάποιον $\alpha\in\mathbb{R}$

Θ.δ.ο ότι $f(a)=a$.

Πράγματι αν $f(a)>a \overset{f^{-1}\nearrow}{\Leftrightarrow} f^{-1}(f(a))>f^{-1}(a)$ δηλ από (I) $f(f^{-1}(a))>f(a)$ δηλ $a>f(a)$ άτοπο

αν $f(a)<a \overset{f\nearrow}{\Longrightarrow} f(f(a))<f(a)$ δηλ $f(f^{-1}(a))<f(a)$ δηλ $a<f(a)$ άτοπο.

Άρα $f(a)=a$. (II)

Αντίστροφα: Έστω ότι ισχύει $f(a)=a$ για κάποια $a\in\mathbb{R}$ τότε έχω $f^{-1}(f(a))=f^{-1}(a)$ δηλ $a=f^{-1}(a)$ και επομένως από (II) $f(a)=f^{-1}(a)$. //

2) (i) Έστω $x_0\in\mathbb{R}$: $f(x_0)=0$ τότε η (I) για $a=x_0$ και $b=-x_0$ γίνεται: $f(x_0-x_0)=f(x_0)\cdot f(-x_0)$ ή $f(0)=0\cdot f(-x_0)$ δηλ. $f(0)=0$ άτοπο.

(ii) Για $a=b=\frac{x}{2}$ η (I) γίνεται:

$$f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)\cdot f\left(\frac{x}{2}\right)=f^2\left(\frac{x}{2}\right)>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

(iii) Για $a=0$ και $b=x$ η (I) γίνεται

$$f(x)=f(0)\cdot f(x) \Leftrightarrow f(x)\left(f(0)-1\right)=0 \overset{f(x)\neq 0}{\Longleftrightarrow} f(0)=1$$

(iv) Για $a=x$, $b=-x$ η (I) γίνεται:

$$f(0)=f(x)\cdot f(-x) \Leftrightarrow 1=f(x)\cdot f(-x) \Leftrightarrow f(-x)=\frac{1}{f(x)}$$

$\forall x\in\mathbb{R}$

β) Αφού από (iii) έχω $f(0)=1$ η μοναδική λύση της $f(x)=1$ είναι $\boxed{x=0}$

Έστω τώρα $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow$

$f(x_1)=\frac{1}{f(-x_2)} \Leftrightarrow f(x_1)\cdot f(-x_2)=1 \overset{(I)}{\Leftrightarrow} f(x_1-x_2)=1$ δηλ

$x_1-x_2=0$ δηλ $x_1=x_2$ άρα f 1-1 άρα αντιστρέψιμη.

Έστω τώρα $f^{-1}(x)=\omega_1$ τότε $f(\omega_1)=x$ δηλ
και $f^{-1}(y)=\omega_2$ $f(\omega_2)=y$

$f(\omega_1)\cdot f(\omega_2)=xy$ δηλ από (I) $f(\omega_1+\omega_2)=xy \Leftrightarrow$

$f^{-1}(xy)=\omega_1+\omega_2=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$.

3) $A_f=\mathbb{R}$

Για $x\leq 0$ $f(x)=y \Leftrightarrow x^2=y \overset{x\leq 0}{\Longleftrightarrow} x=-\sqrt{y}$ $y\geq 0$

Για $x>0$ $f(x)=y \Leftrightarrow -2x=y \Leftrightarrow x=-\frac{y}{2}$ $y<0$

Επομένως $\forall y\in\mathbb{R}=f(A)$ η εξίσωση $f(x)=y$ έχει μία ακριβώς λύση, άρα είναι 1-1 επομένως αντιστρέψιμη με

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} -\sqrt{x} & \text{αν } x\geq 0 \\ -\frac{x}{2} & \text{αν } x<0 \end{cases}$$