ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Πάνος Γαραμηνός.

1) Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ δηλ. $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και $f \uparrow$ τότε ν.δ.ο:

$$f(x) = f^{-1}(x) \Longleftrightarrow f(x) = x \quad x \in \mathbb{R}$$

(Παρατήρηση: Αν μία συνάρτηση f είναι 1-1 τότε είναι αντιστρέψιμη. Τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται αν λύσουμε την εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$. Με την παραπάνω άσκηση όμως αν η $f \uparrow$ και το σ.τ. είναι το $\mathbb{R}$ τότε μπορούμε να βρούμε τα κοινά σημεία της C_f και $C_{f^{-1}}$ βρίσκοντας τα κοινά σημεία της C_f με την $y=x$ φυσικά αφού αποδείξουμε την προηγούμενη άσκηση. Προσοχή δεν ισχύει η προηγούμενη άσκηση για $f \downarrow$).

2) Για την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύουν:

$f(0) \neq 0$ και $f(\alpha+\beta) = f(\alpha) \cdot f(\beta)$ (I) $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) ν.δ.ο (i) $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (iii) $f(0) = 1$

(ii) $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (iv) $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

β) Αν η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$ τότε ν.δ.ο η f αντιστρέφεται και για κάθε $x > 0$, $y > 0$ ισχύει:

$$f^{-1}(xy) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$$

3) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν } x \leq 0 \\ -2x & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

Ν.δ.ο η f είναι 1-1 και έπειτα να βρείτε την αντίστροφή της.

4) Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(1+f(x))=2x-6+f(x) \quad (\mathrm{I}) \quad \forall\ x\in\mathbb{R}$$

Ν.δ.ο

α) η f είναι 1-1 β) $f(3)=2$ γ) να λύσετε την εξίσωση $f(1+2f(x^2+x+1))=f(1+f(5))-4$

5) Έστω f μία συνάρτηση με π.ο. $\mathbb{R}$ και σ.τ. $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(f(x))+f^3(x)=2x+6 \quad (\mathrm{I}) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

α) ν.δ.ο (i) η f είναι 1-1

(ii) $$f^{-1}(x)=\frac{f(x)+x^3-6}{2} \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

β) Να λύσετε τις εξισώσεις:

(i) $f(2x^3+x)=f(4-x)$ (ii) $f(x)=x$

6) Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράστασή διέρχεται από τα σημεία $A(-1,2002)$ και $B(1,2004)$

α) Ν.δ.ο η $f\uparrow$ β) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(f(x)-2001)<2004$$

γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f[2+f^{-1}(x^2+x+2000)]=2004$$