(iv) Για $a = x$, $b = -x$ η (I) γίνεται:

$$f(0) = f(x) \cdot f(-x) \Leftrightarrow 1 = f(x) \cdot f(-x) \Leftrightarrow f(-x) = \frac{1}{f(x)}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

β) Αφού από (iii) έχω $f(0) = 1$ η μοναδική λύση της $f(x) = 1$ είναι $\boxed{x = 0}$

Έστω τώρα $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow$

$$f(x_1) = \frac{1}{f(-x_2)} \Leftrightarrow f(x_1) \cdot f(-x_2) = 1 \overset{(I)}{\Leftrightarrow} f(x_1 - x_2) = 1$$ δηλ.

$x_1 - x_2 = 0$ δηλ. $x_1 = x_2$ άρα f 1-1. άρα αντιστρέψιμη.

Έστω τώρα $f^{-1}(x) = \omega_1$ τότε $f(\omega_1) = x$ δηλ.
και $f^{-1}(y) = \omega_2$ $f(\omega_2) = y$

$$f(\omega_1) \cdot f(\omega_2) = xy$$ δηλ. από (I) $$f(\omega_1 + \omega_2) = xy \Leftrightarrow$$

$$f^{-1}(xy) = \omega_1 + \omega_2 = f^{-1}(x) + f^{-1}(y).$$

3) $A_f = \mathbb{R}$

Για $x \leq 0$ $f(x) = y \Leftrightarrow x^2 = y \overset{x \leq 0}{\Longleftrightarrow} x = -\sqrt{y}$ $y \geq 0$

Για $x > 0$ $f(x) = y \Leftrightarrow -2x = y \Leftrightarrow x = -\frac{y}{2}$ $y < 0$

Επομένως $\forall y \in \mathbb{R} = f(A)$ η εξίσωση $f(x) = y$ έχει μία ακριβώς λύση, άρα είναι 1-1 επομένως αντιστρέψιμη με

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & \text{αν } x \geq 0 \\ -\frac{x}{2} & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$