4) α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 1 + f(x_1) = 1 + f(x_2)$

Άρα $f(1 + f(x_1)) = f(1 + f(x_2))$ οπότε

$f(1 + f(x_1)) - f(x_1) = f(1 + f(x_2)) - f(x_2)$ άρα από (I)

$2x_1 - 6 = 2x_2 - 6 \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ άρα f 1-1.

β) η (I) για $x=3$ γίνεται: $f(1+f(3)) = \cancel{2 \cdot 3} - \cancel{6} + f(3)$

$\overset{f\ 1\text{-}1}{\Leftrightarrow} 1 + f(3) = 3 \Leftrightarrow f(3) = 2$

γ) η (I) για $x=5$ γίνεται

$f(1+f(5)) = 4 + f(5) \Leftrightarrow \boxed{f(1+f(5)) - 4 = f(5)}$

Οπότε η εξίσωση γίνεται

$f(1 + 2f(x^2+x+1)) = f(5)$

$1 + 2f(x^2+x+1) = 5 \Leftrightarrow f(x^2+x+1) = 2 \Leftrightarrow$

$f(x^2+x+1) = f(3) \overset{f\ 1\text{-}1}{\Leftrightarrow} x^2+x+1 = 3 \Leftrightarrow x^2+x-2=0$ $x_1=-2$, $x_2=1$

5) α) (i) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$ τότε

$f(f(x_1)) = f(f(x_2))$

Επίσης

$f^3(x_1) = f^3(x_2)$

$\xrightarrow{(+)} f(f(x_1)) + f^3(x_1) = f(f(x_2)) + f^3(x_2)$

οπότε από (I) $2x_1 + 6 = 2x_2 + 6 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ άρα f 1-1 άρα υπάρχει η f^{-1}

(ii) Στην σχέση (I) θέτω $f(x) = y$ οπότε η (I) γίνεται $f(y) + y^3 = 2x + 6 \Leftrightarrow x = \dfrac{f(y) + y^3 - \cancel{6}}{2}$

άρα $f^{-1}(x) = \dfrac{f(x) + x^3 - 6}{2}$

β) (i) $f(2x^3+x)=f(4-x) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}$

$2x^3+x=4-x \Leftrightarrow$

$2x^3+2x-4=0 \Leftrightarrow x^3+x-2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+2)=0$

	1	0	1	−2
1	↓	1	1	2
	1	1	2	0

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \\ x^2+x+2=0 \text{ αδύνατη} \end{cases}$

(ii) $f(x)=x \Leftrightarrow x=f^{-1}(x) \Leftrightarrow$

$x=\dfrac{f(x)+x^3-6}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{x+x^3-6}{2} \Leftrightarrow$

$x^3-x-6=0 \Leftrightarrow \boxed{x=2}$

6) α) Έχω $f(-1)=2002$, $f(1)=2004$

Αφού η f είναι γνησίως μονότονη θα έχω ότι η $f\uparrow$ ή $f\downarrow$. Όμως για $x_1=-1<x_2=1$ έχω $f(-1)=2002<f(1)=2004$

άρα η $f\uparrow$

β) $f(f(x)-2001)<2004$

$f(f(x)-2001)<f(1) \Leftrightarrow$ $f\uparrow$ άρα

$f(x)-2001<1 \Leftrightarrow f(x)<2002 \Leftrightarrow$

$f(x)<f(-1) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x<-1$

7) α) Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $f(x_1)=f(x_2)$

τότε $f(f(x_1))=f(f(x_2))$ και από (I)

$x_1f(x_1)=x_2f(x_2)$ και επειδή $f(x_1)=f(x_2)\neq 0$

έχω $x_1=x_2$ άρα f 1-1