1 ΘΕΩΡΙΑ

Το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών είναι ένα υπερσύνολο του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, στο οποίο:

- Επεκτείνονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού έτσι, ώστε να έχουν τις ίδιες ιδιότητες όπως και στο $\mathbb{R}$ με το μηδέν να είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης και το ένα το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού,
- Υπάρχει ένα στοιχείο i τέτοιο, ώστε $i^2 = -1$,
- Κάθε στοιχείο z του $\mathbb{C}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο με τη μορφή $z = \alpha + \beta i$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Το α λέγεται πραγματικό μέρος του z και συμβολίζεται $\text{Re}(z)$, ενώ το β φανταστικό μέρος του z και συμβολίζεται $\text{Im}(z)$.

$$\alpha + \beta i = \gamma + \delta i \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \alpha = \gamma \\ \beta = \delta \end{matrix} \right\}$$

$$\alpha + \beta i = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{matrix} \right\}$$

Αν $z \neq 0$, $z^0 = 1$ και $z^{-\nu} = \dfrac{1}{z^\nu}$ για κάθε θετικό ακέραιο ν.

$$z + \overline{z} = 2\alpha = 2\,\text{Re}(z) \quad \text{και} \quad z - \overline{z} = 2\beta i = 2i\,\text{Im}(z)$$

$z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

Ισχύουν και για περισσότερους από δύο $\overline{z_1 + z_2 + \ldots\ldots + z_\nu} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \ldots\ldots + \overline{z_\nu}$

$\overline{z_1 \cdot z_2 \ldots\ldots z_\nu} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \ldots\ldots \overline{z_\nu}$ και αν είναι ίσοι, τότε $\left(\overline{z^\nu}\right) = \left(\overline{z}\right)^\nu$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

1 *Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ με πραγματικούς συντελεστές α, β, γ όταν Δ<0, έχει δυο λύσεις οι οποίες είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί.*

Όπως στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση παίρνει τη μορφή $\left(z + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\Delta}{4\alpha^2}$

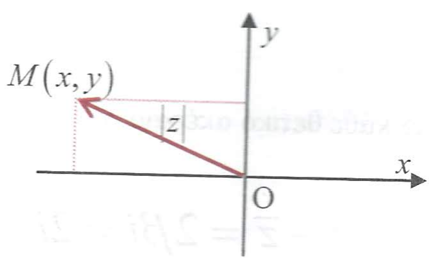
$\frac{\Delta}{4\alpha^2} = \frac{(-1)(-\Delta)}{4\alpha^2} = \frac{i^2\left(\sqrt{-\Delta}\right)^2}{4\alpha^2} = \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$ και η εξίσωση γράφεται $\left(z + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$.

Άρα οι λύσεις είναι $z_{1,2} = \frac{-\beta \pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$ οι οποίες είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί. ⊗

2 *Ορισμός* ***(του μέτρου ενός μιγαδικού αριθμού)***

Ορίζουμε ως μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + yi$ την απόσταση της εικόνας $M(x, y)$ από την αρχή των αξόνων Ο.

$|z| = \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$



⊗

$|z| = |\bar{z}| = |-z|$

$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

3 Να αποδειχθεί ότι $|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2|$

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2| \Leftrightarrow |z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2|z_2|^2 \Leftrightarrow$

$(z_1 \cdot z_2)\overline{(z_1 \cdot z_2)} = z_1 \cdot \overline{z_1} \cdot z_2 \cdot \overline{z_2} \Leftrightarrow z_1 \cdot \overline{z_1} \cdot z_2 \cdot \overline{z_2} = z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

⊗

$$|z_1 z_2 \ldots\ldots z_\nu| = |z_1||z_2|\ldots\ldots|z_\nu| \quad \text{και} \quad |z^\nu| = |z|^\nu$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \; z_2 \neq 0$$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

4 Ορισμός (πραγματικής συνάρτησης)

Έστω Α ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$.

- Το γράμμα x, που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του Α λέγεται ανεξάρτητη μεταβλητή
- Το γράμμα y, που παριστάνει την τιμή της f στο x λέγεται εξαρτημένη μεταβλητή.
- Το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f συμβολίζεται και με D_f.

5 Ορισμός (συνόλου(πεδίου) τιμών συνάρτησης)

Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται σύνολο τιμών της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Είναι δηλαδή $f(A) = \{y \,/\, y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}$.

6 Ορισμός (ίσων συναρτήσεων)

Δύο συναρτήσεις λέγονται ίσες όταν: • έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α και
• για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$

7 Ορισμός (αθροίσματος, διαφοράς, γινομένου και πηλίκου δυο συναρτήσεων)

Ορίζουμε ως άθροισμα $f+g$, διαφορά $f-g$, γινόμενο $f \cdot g$, και πηλίκο $\dfrac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Το πεδίο ορισμού των $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ είναι η τομή $A \cap B$ των πεδίων ορισμού Α και Β των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, ενώ το πεδίο ορισμού της $\dfrac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$, εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$, δηλαδή το σύνολο

$$\{x / x \in A \text{ και } x \in B, \text{ με } g(x) \neq 0\}$$

8 Ορισμός (σύνθεσης συναρτήσεων)

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού Α και Β αντίστοιχα, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g, και τη συμβολίζουμε με $g \circ f$, τη συνάρτηση με τύπο $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

- Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g, δηλαδή είναι το σύνολο
$A_1 = \{x \in A / f(x) \in B\}$.
- Η συνάρτηση $g \circ f$ διαβάζεται σύνθεση της f με την g.

9 Ορισμός (μονοτονίας συνάρτησης)

Μια συνάρτηση f λέγεται:

Γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$.

Γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$.

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

10 Ορισμός (ακροτάτων συνάρτησης)

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι:

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$
- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

11 Ορισμός (συνάρτησης 1-1)

Μια συνάρτηση $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Αντίστροφη

Έστω μια συνάρτηση $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι 1-1. Τότε σε κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της για το οποίο $f(x) = y$. Οπότε μπορεί να οριστεί μια συνάρτηση g από το $f(A)$, σύνολο τιμών της f, στο Α, πεδίο ορισμού της f. Η συνάρτηση g

έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f

έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού Α της f

ισχύει η ισοδυναμία $f(x)=y \Leftrightarrow g(y)=x$.

Η αντίστροφη αυτή διαδικασία λέγεται αντίστροφη συνάρτηση της f και συμβολίζεται f^{-1}. Επομένως $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$. ⊗

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=l$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\left(f(x)-l\right)=0$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f\left(x_0+h\right)=l$$

12 *Θεώρημα*

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<0$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0

13 *Θεώρημα*

Αν οι συναρτήσεις έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. ⊗

Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(kf(x)\right)=k\lim_{x\to x_0}f(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)},\ \text{εφόσον}\ \lim_{x\to x_0}g(x)\neq 0$$

$$\lim_{x\to x_0}|f(x)|=\left|\lim_{x\to x_0}f(x)\right|$$

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)}=\sqrt[k]{\lim_{x\to x_0}f(x)},\ \text{εφόσον}\ f(x)\geq 0\ \text{κοντά στο}\ x_0$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{\nu}=\left[\lim_{x\to x_0}f(x)\right]^{\nu},\ \nu\in\mathbb{N}$$

14 κριτήριο περεμβολής

Έστω οι συναρτήσεις f,g,h. Αν $h(x)\leq f(x)\leq g(x)$ κοντά στο x_0 και

$$\lim_{x\to x_0}h(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)=l,\ \text{τότε}\ \lim_{x\to x_0}f(x)=l$$

15 Ορισμός (συνεχούς συνάρτησης σε σημείο)

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, όταν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f\left(x_0\right)$.

Μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν:

α) δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή

β) υπάρχει το όριό της στο x_0, αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της.

Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση P είναι συνεχής, αφού για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$.

Κάθε ρητή συνάρτηση $\frac{P}{Q}$ είναι συνεχής, αφού για κάθε x_0 του πεδίου ορισμού της ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

Οι συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχείς αφού $\lim\limits_{x \to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$ και $\lim\limits_{x \to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$.

Οι συναρτήσεις $f(x) = a^x$ και $g(x) = \log_a x$, $0 < a \neq 1$ είναι συνεχείς.

16 *Θεώρημα*

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0, τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις $f+g$, cf όπου $c \in \mathbb{R}$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $|f|$ και $\sqrt[\nu]{f}$ με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0.

17 *Θεώρημα*

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

18 Ορισμός (συνεχούς συνάρτησης σε (α,β) και σε [α,β])

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β).

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β], όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)=f(\beta)$.

19 Θεώρημα (Bolzano)

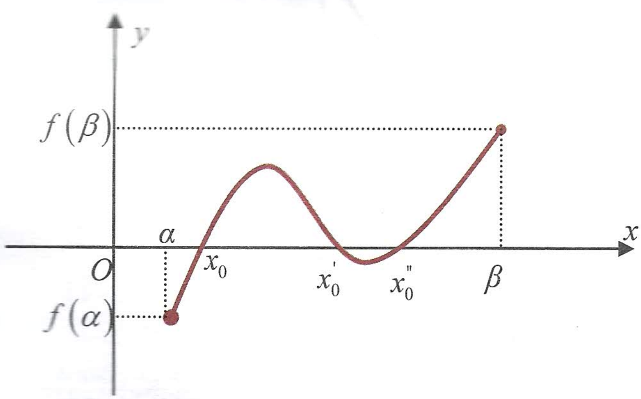
Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β]. Αν

- η f είναι συνεχής στο [α,β] και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha)f(\beta)<0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$

δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα (α,β).

γεωμετρική (σχηματική) ερμηνεία (παρουσίαση) του θεωρήματος



20 Θεώρημα (ενδιάμεσων τιμών)

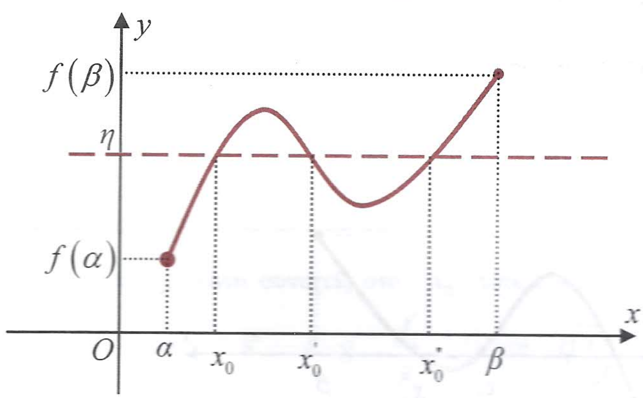
Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β]. Αν
- η f είναι συνεχής στο [α,β] και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

Τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$.

Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta,\ x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι:
- η g είναι συνεχής στο [α,β] και
- $g(\alpha)g(\beta) < 0$, αφού $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$.



21 Θεώρημα (μέγιστης και ελάχιστης τιμής)

Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α,β], τότε η f παίρνει στο [α,β] μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m, δηλαδή υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, ισχύει $m \leq f(x) \leq M$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

22 Ορισμός (εφαπτομένης της γραφικής παράστασης συνάρτησης)

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός λ, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Α, την ευθεία ε που διέρχεται από το Α και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.

23 Ορισμός (παραγώγου συνάρτησης σε σημείο)

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται $f'(x_0)$, δηλαδή $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. ⊗

Αν στην ισότητα $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ αντικατασταθεί $x=x_0+h$, τότε έχουμε $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Πολλές φορές το $h=x-x_0$ συμβολίζεται με Δx, ενώ το $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ με $\Delta f(x_0)$, οπότε $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$.

Κατά Leibniz η παράγωγος στο x_0, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ ή $\dfrac{df(x_0)}{dx}\Big|_{x=x_0}$

Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β] του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και επιπλέον ισχύει $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in\mathbb{R}$ **και** $\lim\limits_{x\to \beta^-}\dfrac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in\mathbb{R}$.

24 παράγωγος βασικών συναρτήσεων

της $f(x)=c$

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{c-c}{x-x_0}=0, \text{ οπότε } \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0, \text{ δηλαδή } (c)'=0$$

της $f(x)=x$

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x-x_0}{x-x_0}=1, \text{ οπότε } \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}1=1, \text{ δηλαδή } (x)'=1$$

της $f(x)=x^\nu$

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^\nu-x_0^\nu}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots+x_0^{\nu-1}\right)}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots+x_0^{\nu-1}$$

οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots+x_0^{\nu-1}\right)=\nu x_0^{\nu-1}$, δηλαδή $\left(x^\nu\right)'=\nu x^{\nu-1}$

της $f(x)=\sqrt{x},\ \ x>0$

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$$

οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$, δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

- της $f(x)=a^x,\ \ a>0$

Αν $y=a^x=e^{x\ln a}$ και θέσουμε $u=x\ln a$, τότε έχουμε $y=e^u$.

Επομένως $y'=\left(e^u\right)'=e^u u'=e^{x\ln a}\ln a=a^x\ln a$, δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=a^x\ln a$.

- της $f(x)=\ln|x|,\ \ x\in\mathbb{R}^*$

αν $x>0$, τότε $\left(\ln|x|\right)'=\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}$, ενώ

αν $x<0$, τότε $\ln|x|=\ln(-x)$, οπότε αν θέσουμε $y=\ln(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=\ln u$.

Επομένως $y'=\left(\ln u\right)'=\dfrac{1}{u}u'=\dfrac{1}{-x}(-1)=\dfrac{1}{x}$ και άρα $\left(\ln|x|\right)'=\dfrac{1}{x}$, δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x)=\dfrac{1}{x}$.

- της $f(x)=\varepsilon\varphi x$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{x\,/\,\sigma\upsilon\nu x=0\}$ έχουμε:

$$\left(\varepsilon\varphi x\right)'=\left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{x}=\frac{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

- της $f(x)=x^{-\nu},\ \ \nu\in\mathbb{N}^*$

Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$. Πράγματι, για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$\left(x^{-\nu}\right)'=\left(\frac{1}{x^\nu}\right)'=\frac{(1)'x^\nu-1(x^\nu)'}{\left(x^\nu\right)^2}=\frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}}=-\nu x^{-\nu-1}$$

25 Ορισμός (ρυθμού μεταβολής)

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y=f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

26 Θεώρημα

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Απόδειξη

Για $x \neq x_0$ έχουμε

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\right]$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}(x-x_0),$$

$$=f'(x_0)\cdot 0=0$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0. ⊗

27 Θεώρημα (παράγωγος αθροίσματος)

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

Απόδειξη

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0)$$

δηλαδή $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$. ⊗

28 Θεώρημα

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

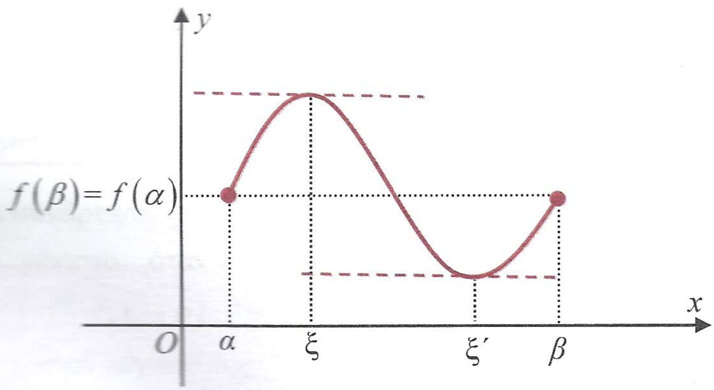
29 Θεώρημα (Rolle)

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β]
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) και
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = 0$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.



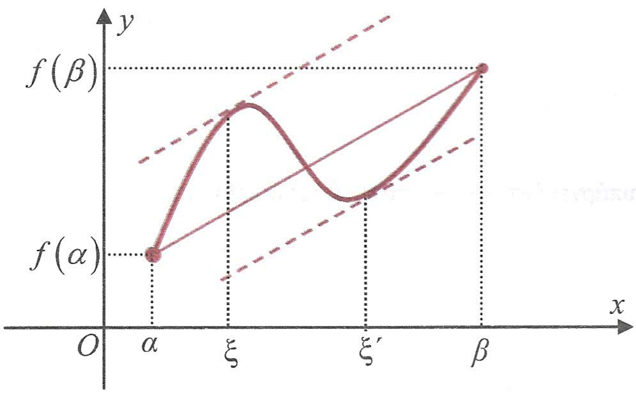
30 Θεώρημα (Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού Θ.Μ.Τ)

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β]
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας των σημείων $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha))$, $\mathrm{B}(\beta, f(\beta))$.



31 Θεώρημα (Συνέπειες του Θ.Μ.Τ)

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

<u>Απόδειξη</u>

Αρκεί να αποδειχθεί ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$.

Πράγματι

Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.

Αν $x_2 < x_1$, τότε στο διάστημα $[x_2, x_1]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_2, x_1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$. ⊗

Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν
Οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
$f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,
τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$

Απόδειξη

Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$. Επομένως, η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$, οπότε $f(x) = g(x) + c$.

32 ορισμοί (τοπικών ακροτάτων)

- Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει δ>0, τέτοιο ώστε $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f.

- Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο, όταν υπάρχει δ>0, τέτοιο ώστε $f(x) \ge f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο της f.

33 Θεώρημα (Fermat)

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0)=0$.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει δ>0 τέτοιο, ώστε $(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq \Delta$ και $f(x)\leq f(x_0)$, για κάθε $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Επομένως,

Αν $x\in(x_0-\delta, x_0)$, τότε θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$, οπότε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$$

Αν $x\in(x_0, x_0+\delta)$, τότε θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0.$$ Έτσι έχουμε $f'(x_0)=0$

Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη. ⊗

34 Θεώρημα (μονοτονίας συνάρτησης)

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ

- Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.
- Αν $f'(x)<0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

Απόδειξη

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1)<f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, οπότε έχουμε $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$.

Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2-x_1>0$, έχουμε $f(x_2)-f(x_1)>0$, οπότε $f(x_1)<f(x_2)$.

Στην περίπτωση που είναι $f'(x)<0$ εργαζόμαστε αναλόγως. ⊗

3.5 Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

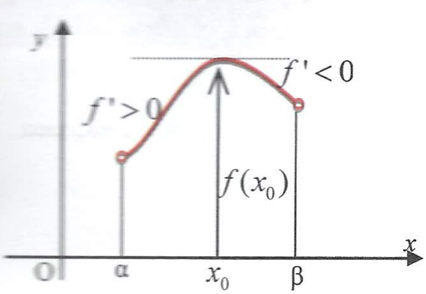
i) Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

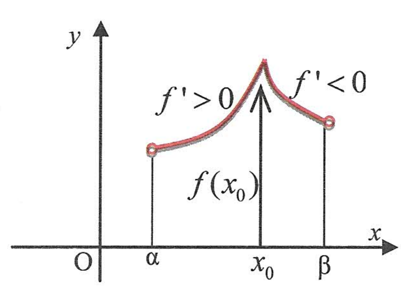
ii) Αν $f'(x)<0$ στο (α,x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

Απόδειξη

i) Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0]$.



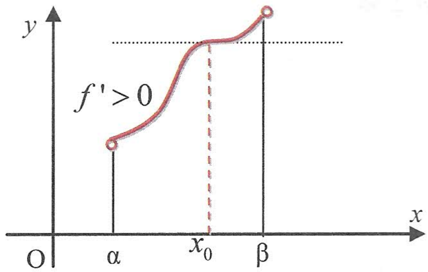


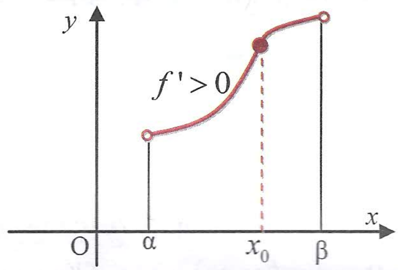
Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in[x_0,\beta)$.

Επομένως ισχύει $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.

iii) Έστω ότι $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.





Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$. Επομένως για $x_1<x_0<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Πράγματι, έστω $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1<x_2$.

Αν $x_1,x_2\in(\alpha,x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

Αν $x_1,x_2\in(\alpha,x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

Αν $x_1,x_2\in[x_0,\beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\beta)$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

Τέλος αν $x_1<x_0<x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Ομοίως, αν $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$. ⊗

36 Ορισμός (κρίσιμων σημείων)

Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ.

37 Ορισμοί (κυρτής και κοίλης συνάρτησης)

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Λέμε ότι:

- Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.
- Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή (αντίστοιχα κοίλη) σ' ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «κάτω» (αντίστοιχα «πάνω») από τη γραφική παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

38 Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.

- Αν $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ.
- Αν $f''(x)<0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ.

39 ορισμός (σημείου καμπής)

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β), ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

40 θεώρημα

Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

41 ορισμοί (ασυμπτώτων της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης)

1. Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ είναι $-\infty$ ή $+\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

2. Αν $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$ (αντίστοιχα $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$), τότε η ευθεία $y = l$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$ (αντίστοιχα στο $+\infty$).

3. Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$, αντίστοιχα στο $+\infty$, αν

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - (\lambda x + \beta) \right) = 0$, αντίστοιχα $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - (\lambda x + \beta) \right) = 0$.

42 Θεώρημα

Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$, αντίστοιχα στο $+\infty$, αν και μόνο αν

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R} \text{ και } \lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-\lambda x\big)=\beta\in\mathbb{R},$$

αντίστοιχα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-\lambda x\big)=\beta\in\mathbb{R}$.

43 Θεώρημα (κανόνες de L' Hospital)

1. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, $x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

2. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, $x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

44 Ορισμός (αρχικής ή παράγουσας συνάρτησης)

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

45 Ορισμός (αόριστου ολοκληρώματος)

Το σύνολο όλων των παραγουσών μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ ονομάζεται αόριστο ολοκλήρωμα της f στο Δ, συμβολίζεται $\int f(x)dx$.

46 Αόριστα ολοκληρώματα

1. $\int 0dx = c$ 2. $\int 1dx = x + c$ 3. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$ 4. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c,\quad a \neq -1$

5. $\int \sigma\upsilon\nu x dx = \eta\mu x + c$ 6. $\int \eta\mu x dx = -\sigma\upsilon\nu x + c$ 7. $\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = \varepsilon\varphi x + c$

8. $\int \frac{1}{\eta\mu^2 x}dx = -\sigma\varphi x + c$ 9. $\int e^x dx = e^x + c$ 10. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν παράγουσα σ' ένα διάστημα Δ, τότε

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

47 *Θεώρημα (ιδιότητες)*

Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β] και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = \lambda \int_\alpha^\beta f(x)dx$
- $\int_\alpha^\beta \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx$
- $\int_\alpha^\beta \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)dx = \lambda \int_\alpha^\beta f(x)dx + \mu \int_\alpha^\beta g(x)dx$
- $\int_\alpha^\beta f(x)dx = -\int_\beta^\alpha f(x)dx$
- $\int_\alpha^\alpha f(x)dx = 0$

48 Θεώρημα

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

49 Θεώρημα

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα [α,β]. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$.

50 Θεώρημα

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.
- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε $G'(x) = F'(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

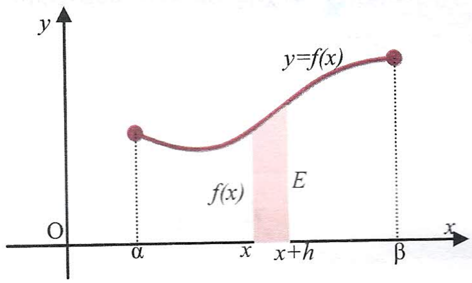
Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $G(x) = F(x) + c$, για κάθε $x \in \Delta$. ⊗

51 Θεώρημα

Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημεό του Δ, τότε η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt,\ x\in\Delta$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ. Δηλαδή ισχύει: $\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)' = f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

Εποπτικά το συμπέρασμα του θεωρήματος προκύπτει ως εξής:

$$F(x+h)-F(x)=\int_{x}^{x+h} f(t)dt$$
$$=E$$
$$\approx f(x)\cdot h$$



Για μικρά $h>0$ είναι $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}\approx f(x)$,

οπότε $F'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$

52 Θεώρημα (Θεμελιώδες Θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού)

Έστω μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α,β], τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta)-G(\alpha)$.

Απόδειξη

Η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο [α,β]. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο [α,β], θα υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $G(x)=F(x)+c$.

Για $x=\alpha$, έχουμε $G(\alpha)=F(\alpha)+c=\int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt+c=c$, οπότε $c=G(\alpha)$.

Επομένως, $G(x)=F(x)+G(\alpha)$, οπότε για $x=\beta$, έχουμε

$G(\beta)=F(\beta)+G(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt+G(\alpha)$ και άρα $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$. ⊗

Ο τύπος της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες και αλλαγής μεταβλητής

- $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx=\left[f(x)g(x)\right]_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$,

  όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β].

- $\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx=\int_{u_1}^{u_2} f(u)du$ όπου f, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u=g(x)$, $du=g'(x)dx$ και $u_1=g(\alpha)$, $u_2=g(\beta)$.