Τάξη: Β΄
Μάθημα: Μαθηματικά Κατεύθυνσης

ΦΥΛΛΑΔΙΑ ΣΗΜΕΙΩΣΕΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Τάξη: Β΄
Μάθημα: Μαθηματικά Κατεύθυνσης

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ – 1

Θέμα: Τα διανύσματα

❶ Η έννοια του διανύσματος

❷ Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων

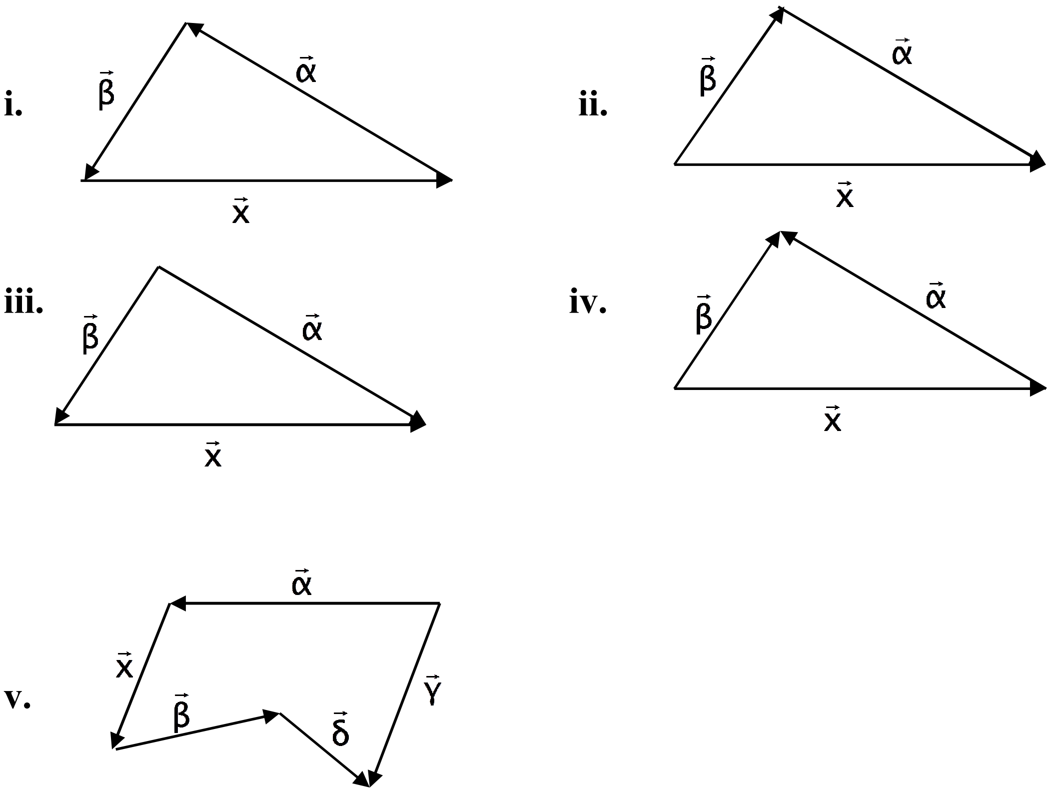
❸ Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

❹ Συντεταγμένες στο επίπεδο

❺ Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

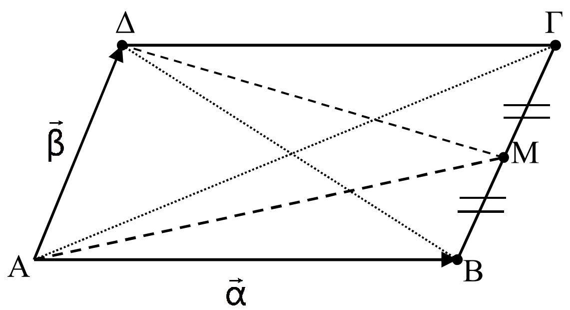
Άσκηση 1

Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως συνάρτηση των υπόλοιπων διανυσμάτων του σχήματος.



Άσκηση 2

Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του σχήματος, να γράψετε τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{\Gamma B}$, $\overrightarrow{\Delta B}$, $\overrightarrow{\Delta M}$, $\overrightarrow{MA}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.



Άσκηση 3

Να αποδείξετε διανυσματικά, ότι τα μέσα των πλευρών ενός τυχαίου τετράπλευρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

Άσκηση 4

Έστω ΑΒΓ ένα τρίγωνο, Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ και Δ, Ε τα μέσα των τμημάτων ΒΜ και ΜΓ αντιστοίχως. Να αποδειχθεί ότι: $\vec{AB}+\vec{A\Delta}+\vec{AE}+\vec{A\Gamma}=4\vec{AM}$.

Άσκηση 5

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Μ, Ν τα μέσα των ΒΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε τέτοια ώστε $\overrightarrow{M\Delta}=\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{NE}=\overrightarrow{\Gamma N}$. Να δείξετε ότι το Β είναι μέσο του ΔΕ.

Άσκηση 6

Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ και Δ. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο Μ το διάνυσμα $\vec{u}=5\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{M\Gamma}-4\overrightarrow{M\Delta}$ είναι σταθερό (ανεξάρτητο του Μ).

Άσκηση 7

Αν ισχύει $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{\Delta B}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α και Δ ταυτίζονται.

Άσκηση 8

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρεθεί σημείο Κ του επιπέδου ώστε

$2\overrightarrow{AK}+3\overrightarrow{BK}+5\overrightarrow{\Gamma K}=\vec{0}$.

Τάξη: Β΄
Μάθημα: Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Άσκηση 9

Αν για τα σημεία Α, Β, Μ, Ρ ισχύει $\vec{PA}+\vec{PB}=\vec{MA}+\vec{MB}$, να δείξετε ότι $\vec{MP}=\vec{0}$.

Άσκηση 10

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και ένα τυχαίο σημείο Ο του χώρου. Αν Κ είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου, να δείξετε ότι $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}+\overrightarrow{O\Delta}=4\cdot\overrightarrow{OK}$.

Άσκηση 11

Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δύο μη συγγραμμικά διανύσματα.

i. Αν $x\cdot\vec{\alpha}+y\cdot\vec{\beta}=\vec{0}$ με $x,\ y\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $x=y=0$

ii. Αν $x_1\cdot\vec{\alpha}+y_1\cdot\vec{\beta}=x_2\cdot\vec{\alpha}+y_2\cdot\vec{\beta}$ με $x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι $x_1=x_2$ και $y_1=y_2$

iii. Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες τα διανύσματα $\vec{u}=(x-1)\cdot\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{v}=(2+3x)\cdot\vec{\alpha}-2\cdot\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά.

Άσκηση 12

Αν ισχύει $2\vec{PA}+3\vec{PB}-5\vec{P\Gamma}=\vec{0}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

Άσκηση 13

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ένα σημείο Μ, τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AM}=\kappa\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{A\Gamma}$ με $\kappa+\lambda=1$. Να δειχθεί ότι το Μ ανήκει στην ευθεία ΒΓ.

Τάξη: Β΄
Μάθημα: Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Άσκηση 14

Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ τρία διανύσματα μη συγγραμμικά ανά δυο. Αν ισχύουν $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}+\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} \parallel \vec{\gamma}+\vec{\alpha}$, να αποδείξετε ότι $\vec{\gamma} \parallel \vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

Άσκηση 15

Αν ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ διάμεσοι τριγώνου ΑΒΓ και $\kappa,\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}^*$ ώστε $\kappa \cdot \overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} + \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{BE}} + \mu \cdot \overrightarrow{\Gamma \mathrm{Z}} = \vec{0}$ να αποδείξετε ότι $\kappa = \lambda = \mu$.

Άσκηση 16

Δίνονται τα συνεπίπεδα διανύσματα $\vec{\alpha},\ \vec{\beta},\ \vec{\gamma}$ και τα $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 3\cdot\vec{\alpha} + \vec{\beta} - 4\cdot\vec{\gamma},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 2\cdot\vec{\alpha} - 5\cdot\vec{\beta} + \vec{\gamma},\ \overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} = 5\cdot\vec{\alpha} + 13\cdot\vec{\beta} - 14\cdot\vec{\gamma}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

Άσκηση 17

Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Κ και Λ που τριχοτομούν το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, με Α(3, –1) και Β(9, 7).

Άσκηση 18

Αν τα σημεία Δ(–1, 4), Ε(5, 4) και Ζ(2, –1) είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα τριγώνου ΑΒΓ, να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του.

Άσκηση 19

Δίνεται το ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις: ΑΒ και ΓΔ. Αν Α(-1, 2), Β(2, 3) και Γ(5, 0), να βρεθεί η κορυφή Δ.

Τάξη: Β΄
Μάθημα: Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Άσκηση 20

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,\ 1)$, $\vec{\beta}=(3,\ -2)$ και $\vec{\gamma}=(0,\ 6)$.

i. Δείξτε ότι είναι ανά δυο μη συγγραμμικά.

ii. Γράψτε το $\vec{\gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Άσκηση 21

Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ τα διανύσματα $\vec{\alpha} = 4\lambda\vec{i} - 9\vec{j}$ και $\vec{\beta} = -4\vec{i} + \lambda\vec{j}$ είναι:

i. παράλληλα   ii. ομόρροπα.

Άσκηση 22

Να βρείτε τις τιμές του μ ώστε τα σημεία Α(-3, 1) Β(μ, 3) Γ(- 5, 1 - μ) να είναι κορυφές τριγώνου.

Άσκηση 23

Δίνονται τα σημεία Α(3, 2), Β(7, - 4). Να βρεθεί σημείο του χ'χ ώστε το τρίγωνο ΜΑΒ να είναι:

i. ισοσκελές με κορυφή το Μ
ii. ορθογώνιο στο Μ

Άσκηση 24

Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(7,\ 6)$ κατά τις διευθύνσεις των διανυσμάτων $\vec{x}=(2,\ 1)$ και $\vec{y}=(3,\ 4)$. Ποιες είναι οι συνιστώσες αυτής της ανάλυσης; Μπορεί το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{x}$ και $\vec{\omega}=\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$ και γιατί;

Τάξη: Β΄
Μάθημα: Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Άσκηση 25

Να βρείτε τις τιμές των κ, λ $\in \mathbb{R}$, ώστε τα διανύσματα

$\vec{\alpha} = (\kappa^2 + \lambda^2, \kappa - \lambda)$ και $\vec{\beta} = (-34, 2)$ να είναι αντίθετα.

Άσκηση 26

Το σημείο Α(4, 2) ανήκει σε κύκλο κέντρου Κ(3, 5). Να βρεθεί το αντιδιαμετρικό σημείο του Α.

Άσκηση 27

Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\lambda^2 - 1, \lambda^2 - \lambda)$. Για ποια τιμή του λ είναι:

i. $\vec{\alpha} = \vec{0}$

ii. $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\alpha}$ // x΄x.

Άσκηση 28

Να βρείτε για ποιες τιμές του x τα διανύσματα είναι μηδενικά

i. $\vec{\alpha} = (x^2-4)\vec{i} + (x^2 + 2x)\vec{j}$

ii. $\vec{\beta} = x^2(\vec{i} + \vec{j}) - 3(x\vec{i} + 3\vec{j})$

Άσκηση 29

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 2)$ και $\vec{\beta} = (1, -\sqrt{3})$.

i. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει καθένα από τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με τον x΄x.

ii. Να βρείτε τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$.

Τάξη: Β΄
Μάθημα: Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Άσκηση 30

Να βρεθεί το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $\vec{\alpha} = (-3, 4)$.

Άσκηση 31

Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ για το οποίο $\vec{\alpha} = (-4, |\alpha| - 2)$

Άσκηση 32

Έστω $\vec{\alpha} = (1, 2)$, $\vec{\beta} = (2, -1)$ και $\vec{u} = \lambda\vec{\alpha} + \kappa\vec{\beta}$. Αν το $\vec{u}$ σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία $\frac{\pi}{4}$ και έχει μέτρο 10, να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u}$.

Άσκηση 33

Έστω $\vec{\alpha} = (2, -3)$, $\vec{\beta} = (5, 1)$ και $\vec{\gamma} = (4, 6)$.

i) Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha}\,\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}\,\vec{\gamma}$.

ii) Να εξετάσετε αν ισχύει η ισότητα $\vec{\alpha}(\vec{\beta}\,\vec{\gamma}) = (\vec{\alpha}\,\vec{\beta})\vec{\gamma}$

Άσκηση 34

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$, $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 60^{o}$ και το τρίγωνο ΑΒΓ με $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$, $\overrightarrow{B\Gamma} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta}$. Να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ.

Άσκηση 35

Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (3\lambda + 1, 3)$ και $\vec{\beta} = (4-\lambda, 10)$ είναι $\frac{\pi}{2}$.

Τάξη: Β΄
Μάθημα: Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Άσκηση 36

Αν Α(1,1) και Β(4,2) να βρείτε ένα σημείο Μ $\in$ x΄x έτσι ώστε το τρίγωνο ΑΜΒ να είναι ορθογώνιο στο Μ.

Άσκηση 37

Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα του χώρου. Να αποδείξετε ότι ισχύει η ισοδυναμία: $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right| = \left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|$

Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία αυτής της πρότασης;

Άσκηση 38

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $\left|\vec{\alpha}\right| = \sqrt{3}$, $\left|\vec{\beta}\right| = 1$ και η γωνία $\hat{\omega} = \left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{6}$. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

Άσκηση 39

Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι δυο διανύσματα τέτοια ώστε $\left|\vec{\alpha}\right| = 2$, $\left|\vec{\beta}\right| = 3$, $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{2\pi}{3}$ και $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\omega} = \left(\widehat{\vec{\gamma}, \vec{\alpha}}\right)$.

Άσκηση 40

Αν $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}| = 2$ και $(\vec{\alpha} \hat{,} \vec{\beta}) = \frac{\pi}{2}$, να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\nu} = (\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\vec{\beta} + 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$.

Τάξη: Β΄
Μάθημα: Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Άσκηση 41

Αν είναι $\vec{\alpha} \perp (\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ και $\vec{\gamma} \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$, να αποδείξετε ότι $\vec{\beta} \perp (\vec{\alpha}+\vec{\gamma})$.

Άσκηση 42

Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, $\left(\vec{\alpha}+3\vec{\beta}\right) \perp \left(\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right)$ και $\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right| = 2$, να υπολογίσετε τα $\left|\vec{\alpha}\right|$, $\left|\vec{\beta}\right|$.

Άσκηση 43

Αν για τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ ισχύει $\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \sqrt{3}\vec{\gamma} = \vec{0}$ να βρείτε τις γωνίες $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\gamma}})$.

Άσκηση 44

Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ ισχύει $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και

$|\vec{\alpha}| = \dfrac{|\vec{\beta}|}{2} = \dfrac{|\vec{\gamma}|}{3}$, ν΄ αποδείξετε ότι:

i) $\vec{\beta} = 2\vec{\alpha}$

ii) $\vec{\beta} \uparrow\downarrow \vec{\gamma}$

Άσκηση 45

Να υπολογίσετε τα μήκη των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου που κατασκευάζεται με τα διανύσματα

$3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$, αν $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{2}$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 135^o$.

Τάξη: Β΄
Μάθημα: Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Άσκηση 46

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$, $|\vec{\gamma}| = 1$ και $2\vec{\alpha} - \vec{\beta} + 3\vec{\gamma} = \vec{0}$. Να υπολογίσετε τον αριθμό $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}$.

Άσκηση 47

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$.

Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}$, $\widehat{(\vec{\beta}, \vec{\gamma})}$ και $\widehat{(\vec{\gamma}, \vec{\alpha})}$.

Άσκηση 48

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τέτοια ώστε $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $|3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = 6\sqrt{3}$. Να βρείτε τη γωνία τους.

Άσκηση 49

Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύουν $(\vec{\alpha} \hat{,} \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$,

$(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}| = 19\sqrt{19}$ να υπολογίσετε τα μέτρα των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

Άσκηση 50

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2|\vec{\beta}|$ και $(\vec{\alpha} \hat{,} \vec{\beta}) = 120^o$.

i) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} \neq \vec{0}$.

ii) Να βρείτε διάνυσμα $\vec{x}$ ώστε: $\vec{x} \,//\, (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$ και $\vec{\alpha} \perp (\vec{\beta} - \vec{x})$.

Τάξη: Β΄
Μάθημα: Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Άσκηση 51

i) Να αποδείξετε ότι: $\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\,\vec{\alpha} = \dfrac{(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|^2}$.

ii) Αν $\vec{\alpha} = (2, 3)$ και $\vec{\beta} = (-1, 4)$, να βρείτε την προβολή του $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{\beta}$.

iii) Αν $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 60^0$, να βρείτε την προβολή του διανύσματος $\vec{\nu} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

Άσκηση 52

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-4, 11)$, $\vec{\beta}=(1, -2)$ και $\vec{\gamma} = (-2, 5)$.Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ σε δυο συνιστώσες από τις οποίες η μία είναι παράλληλη στο $\vec{\beta}$ και η άλλη κάθετη στο $\vec{\gamma}$.

Άσκηση 53

Ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$, με $|\vec{\gamma}| = 10\sqrt{5}$, αναλύθηκε σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες $\vec{\alpha} = (-6, 12)$ και $\vec{\beta}$. Να βρείτε τα $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.

Άσκηση 54

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,-1)$, $\vec{\beta} = (1,2)$. Να βρείτε:

i. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

ii. την προβολή του $\vec{\alpha}$ στο $\vec{\beta}$

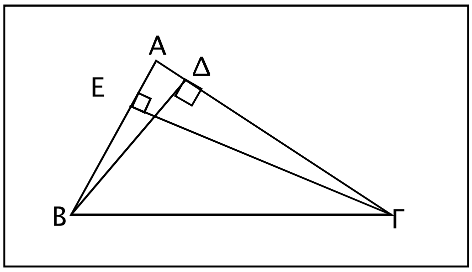
iii. Αν $\vec{OA} = \vec{\alpha}$, $\vec{OB} = \vec{\beta}$ να βρείτε το $\vec{A\Gamma}$ όπου ΑΓ το ύψος του τριγώνου ΟΑΒ.

Τάξη: Β΄
Μάθημα: Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Άσκηση 55

Για τα ύψη ΒΔ και ΓΕ τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι ισχύει:

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{A\Gamma} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$



Άσκηση 56

Έστω Α, Β δύο σταθερά σημεία με ΑΒ = 3. Να βρείτε το σύνολο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 9$.

Άσκηση 57

Έστω τα σημεία Α, Β με (ΑΒ) = 2. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει:

$\overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{AB}) = 5$.

Άσκηση 58

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ διάμεσός του. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει:

$$\overrightarrow{AM}^2 = 2\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$$

Άσκηση 59

Θεωρούμε τα σταθερά σημεία Α, Β με ΑΒ = 5. Ένα σημείο Μ μεταβάλλεται, έτσι ώστε να ισχύει $\overrightarrow{AM}\,\overrightarrow{AB} = 15$. Έστω Γ η προβολή του Μ στην ΑΒ.

α) Να αποδείξετε ότι το Μ είναι ένα σταθερό σημείο μεταξύ των ΑΒ.

β) Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Μ;