Θεώρημα Rolle

Θεώρημα μέσης τιμής

ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \le 1 \\ \alpha x^2 + \beta x - 1, & x > 1 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες εφαρμόζεται το Θ. Rolle στο διάστημα [0, 2] και έπειτα να βρείτε το $x_0 \in (0,2)$ που επαληθεύει το θεώρημα.

Απ: $\alpha = -2$, $\beta = 5$, $x_0 = \dfrac{5}{4}$

Άσκηση 2

Θεωρούμε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι:

i) μεταξύ δύο ριζών της f στο Δ, υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της f'

ii) μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f' στο Δ, υπάρχει μία το πολύ ρίζα της f.

Άσκηση 3

Θεωρούμε συνάρτηση f, άρτια και παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi \in \Delta$ τέτοιος, ώστε $f'(\xi) = 0$.

Άσκηση 4

Δίνεται συνάρτηση f, συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$, με $f(2) - f(1) = 1 \quad n \quad 2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$, τέτοιος, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{2\xi^2 - 3\xi + 1}{\xi}$.

Άσκηση 5

Έστω f συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, με $f(\ )=0\, f\ \ 2\ \ (1\ \ )$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=-\dfrac{2x}{x^2+1}\cdot f(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

Άσκηση 6

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f, συνεχής στο $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\alpha f(\alpha)=\ \ f\ \beta\ \ (\beta\ \ )$ για κάποιους θετικούς αριθμούς $\alpha\ \ \beta$ με $\alpha<\beta$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta\ )$, τέτοιος, ώστε $x_0\cdot f'(x_0)\cdot\ln x_0\ \ +f_0(x\ )=\ \ 0$.

Άσκηση 7

Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β), με $\alpha>0$. Θεωρούμε ακόμα ότι ισχύει η σχέση $\alpha f(\beta)-\beta f(\alpha)=0$. Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$, τέτοιος, ώστε $f'(x_0)=\dfrac{f(x_0)}{x_0}$.

ii) η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Άσκηση 8

Δίνεται συνάρτηση f, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f(-\ )=f\ \ 1(\ )=\ 1$ και $f(0)\ \ 0=$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(-1,1)$, τέτοιος, ώστε η εφαπτόμενη της καμπύλης της f' στο σημείο $A(x_0,f'(x_0))$ να είναι παράλληλη, ή να συμπίπτει με την ευθεία $(\varepsilon):\ y=2x-3$.

Άσκηση 9

Έστω συνάρτηση f, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[1, 2]$, με $f(2) = 2f(1)$ και $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (1, 2)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x \cdot f'(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

Άσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις $f(0) = f(2) = 2$ και $f(1) = 3$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi \in (0,2)$, τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 4 - 6\xi$.

Άσκηση 11

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν οι σχέσεις $f(0) = e^6$ και $f(e) = e^{-3}$. Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_1 \in (0,3)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1) = -3f(x_1)$

ii) υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_2 \in (0,3)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_2) = -2x_2 \cdot f(x_2)$.

Άσκηση 12

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι η γραφική της παράσταση τέμνει την ευθεία $y = 2014$, σε δύο σημεία με τετμημένες $0,\ 2\pi$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = \text{συν}x \cdot f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα.

Άσκηση 13

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x + x^2 = \alpha x + \beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες.

Άσκηση 14

Έστω f μια παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Εάν ο αριθμός $z=\dfrac{f(1)+i}{f(2)+i}$ είναι φανταστικός, να αποδείξετε ότι:

i) η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα των τετμημένων σε ένα τουλάχιστον σημείο, του οποίου η τετμημένη ανήκει στο διάστημα $(1,2)$

ii) υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi \in (0,2)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο $\mathrm{A}(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη, ή να συμπίπτει με την ευθεία $y=2014$.

Άσκηση 15

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$. Να αποδείξετε ότι:

i) ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την f στο διάστημα $\left[e,e^2\right]$

ii) υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(e,e^2\right)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)<0$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι

$$f(x_0)>\frac{1}{x_0}.$$

Άσκηση 16

i) Έστω συνάρτηση f, συνεχής στο $[\alpha,\ \beta]$, παραγωγίσιμη στο $(\alpha,\ \beta)$, με $f(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\ \beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\ \beta)$, τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\ln\left(\frac{f(\beta)}{f(\alpha)}\right)\cdot\frac{f(\xi)}{\beta-\alpha}.$$

ii) Έστω συνάρτηση f, συνεχής στο $[a,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β).

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\ \beta)$, τέτοιο, ώστε

$$e^{f(\beta)}+\alpha\cdot f'(\xi)\cdot e^{f(\xi)}=e^{f(\alpha)}+\beta\cdot f'(\xi)\cdot e^{f(\xi)}.$$

Άσκηση 17

i) Έστω συνάρτηση $f:\ [1,3]\to\mathbb{R}$, συνεχής και γνησίως φθίνουσα. Εάν η f είναι παραγωγίσιμη στο (1,3) και έχει σύνολο τιμών το $[0,2]$, να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\ \xi_2\in(1,3)$, τέτοιοι, ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=-2$.

ii) Έστω συνάρτηση $f:\ [0,5]\to\mathbb{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο (0,5) για την οποία ισχύει $f(5)=f(0)+1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1,\ x_2\in(0,5)$, τέτοιοι, ώστε $2f'(x_1)+3f'(x_2)=1$.

Άσκηση 18

Δίνεται συνάρτηση f, συνεχής στο $[0,3]$, παραγωγίσιμη στο $(0,3)$, με $f(0)\quad 0=$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,3)$, τέτοιο, ώστε $f(\quad)=(3-\ \xi\ \ f\quad \xi)\cdot\ '(\xi\quad)$.

Άσκηση 19

Έστω f συνεχής στο $[2,3]$, παραγωγίσιμη στο $(2,3)$ με $9f(2)=\ f\ 4\ \ (3\ \ )$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(2,3)$, με $f'(\xi)=\dfrac{2f(\xi)}{\xi}$.

Άσκηση 20

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ τέτοια ώστε $0\quad (\quad 4< f\ \ x\ <\ )$ για κάθε $x\in[0,2]$ και $f'(x)\neq 2$ για κάθε $x\in[0,2]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(0,2)$ ώστε $f(\xi)=2\xi$.

Άσκηση 21

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[1,5]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,5)$ με $5f(1)=f(\quad =5)\qquad 2$. Δείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,5)$, με $\xi_1\neq\xi_2$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=\dfrac{4}{5}$.

Άσκηση 22

Έστω f συνεχής στο $[1,6]$, f παραγωγίσιμη στο $(1,6)$, $f(1)=f(6)$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2 \in (1,6)$, τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)+4f'(\xi_2)=0$.

Άσκηση 23

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις $f(-5)=-2$ και $f(1)=4$.

Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει $x_0 \in (-5,1)$, ώστε $f(x_0)=1$.

ii) υπάρχουν $\xi_1,\xi_2 \in (-5,1)$, διαφορετικά μεταξύ τους, ώστε:

$$\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}=2$$

Άσκηση 24

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και $0\notin[\alpha,\beta]$, Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta^2-\alpha^2}=\dfrac{f'(x_0)}{2x_0}$.