

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 93.

A2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 16.

A3. α. Λάθος β. Σωστό γ. Σωστό δ. Σωστό ε. Λάθος

A4.

α. $(c)' = 0$

β. $(x^2)' = 2x$

ΘΕΜΑ Β

B1. Για το πλήθος των εργαζομένων που δεν εργάζονται υπερωριακά (v_0) έχουμε:

$$v_1 = 50 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5 = 10$$

Για την τιμή της σχετικής συχνότητας έχουμε: $f_i = \frac{v_i}{v}$, όπου $i = 1, 2, \dots, 5$

Επομένως:

$$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{10}{50} = 0,2$$

$$f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{15}{50} = 0,3$$

$$f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{11}{50} = 0,22$$

$$f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{8}{50} = 0,16$$

$$f_5 = \frac{v_5}{v} = \frac{6}{50} = 0,12$$

Για την αθροιστική συχνότητα N_i , όπου $i = 1, 2, \dots, 5$ ισχύει:

$$N_1 = v_1 = 10$$

$$N_2 = v_1 + v_2 = 25$$

$$N_3 = v_1 + v_2 + v_3 = 36$$

$$N_4 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 44$$

Έτσι, έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

Πλήθος ωρών x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα $f_i \%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i
0	10	20%	10
1	15	30%	25
2	11	22%	36
3	8	16%	44
4	6	12%	50
Σύνολο	50	100	

B2. Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής έχουμε:

$$\bar{x} = \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 + x_5 v_5}{v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{0 + 15 + 22 + 24 + 24}{50}$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} = \frac{85}{50} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{17}{10} \Leftrightarrow \bar{x} = 1,7 \text{ ώρες.}$$

B3. Για τον υπολογισμό της διαμέσου του δείγματος, διατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά ($t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{50}$) και στη συνέχεια βρίσκουμε το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, δηλαδή της εικοστής πέμπτης και εικοστής έκτης παρατήρησης:

$$\delta = \frac{t_{25} + t_{26}}{2} = \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2}$$

χρησιμοποιώντας ότι $N_2 = 25$, οπότε η 25^η παρατήρηση είναι $t_{25} = 1$ και η 26^η παρατήρηση είναι $t_{26} = 2$

B4.

α) Το ποσοστό των υπαλλήλων που εργάζονται υπερωριακά το πολύ τρεις ώρες είναι:

$$F_4 \% = \frac{N_4}{N} \cdot 100\% = \frac{44}{50} \cdot 100\% = 88\%$$

β) Αν αυξηθούν οι υπερωρίες κατά 4 ώρες σε κάθε υπάλληλο, τότε οι νέες τιμές θα είναι: $y_i = x_i + 4$, όπου $i = 1, 2, \dots, 5$ και από την γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου έχουμε:

$$\bar{y} = \bar{x} + 4 = 1,7 + 4 = 5,7 \text{ ώρες μηνιαίως.}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική συνάρτηση.

$$\text{Είναι: } f(x) = -2x^3 + 6x^2 + \alpha \text{ και } f'(x) = -6x^2 + 12x = -6x(x - 2)$$

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 2$ και την ανίσωση:

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$. Έτσι κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας:

Επομένως:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f					

Παρατηρούμε ότι για τη συνεχή συνάρτηση f έχουμε:

- η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$,
- η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 2]$,
- η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(2, +\infty)$

Γ2. Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x = 0$ το $y = f(0) = \alpha$ και τοπικό μέγιστο στο $x = 2$ το $y = f(2) = -2 \cdot 8 + 24 + \alpha = \alpha + 8$. Γνωρίζουμε όμως ότι το ημίαθροισμα των τιμών των ακροτάτων της f είναι -8 , δηλαδή: $\frac{1}{2}(f(0) + f(2)) = -8 \Leftrightarrow \alpha + \alpha + 8 = -16 \Leftrightarrow 2\alpha = -24 \Leftrightarrow \alpha = -12$.

Επομένως: $f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 12$.

Γ3. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1, f(1))$ έχει εξίσωση: $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y - 8 = 6(x - 1) \Leftrightarrow y = 6x + 2$, χρησιμοποιώντας ότι: $f(1) = -2 + 6 - 12 = -8$ και $f'(1) = -6 + 12 = 6$.

Γ4. Εφόσον η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$ για κάθε $x \geq 2$ ισχύει:

$$f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow -2x^3 + 6x^2 - 12 \leq -4 \Leftrightarrow -2x^3 + 6x^2 - 8 \leq 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0.$$

Εναλλακτικά:

$x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x + 2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$,
χρησιμοποιώντας ότι $(x + 2)^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάνοντας την αρχική παραγοντοποίηση του πολυωνύμου με σχήμα Horner.
Άρα για $x \geq 2$ ισχύει σίγουρα ότι $x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = x^2 + 2\lambda x + 7$.

Για την παράγωγό της στο $x_0 = 1$ ισχύει:

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \Leftrightarrow 1 + 2\lambda + 7 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -4$$

Δ2. Έχουμε: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 7x + \frac{2}{3}$ και $f'(x) = x^2 - 8x + 7 = (x - 1)(x - 7)$.

Λύνοντας την εξίσωση $f'(x) = 0$ και την ανίσωση $f'(x) > 0$ προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μονοτονίας για την f :

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

x	$-\infty$	1	7	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	0	+
f				

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[1, 7]$ και γνησίως αύξουσα στο $[7, +\infty)$.

Δ3. Παρατηρούμε ότι $\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \in [1, 7]$ και η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 7]$, οπότε: $\frac{3}{2} < \frac{5}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) > f\left(\frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right) > 0$, (1).

Αντίστοιχα, παρατηρούμε ότι $2020, 2025 \in [7, +\infty)$ όπου η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, επομένως: $2020 < 2025 \Leftrightarrow f(2020) < f(2025) \Leftrightarrow f(2025) - f(2020) > 0$, (2).

Άρα, από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$A = \frac{f(2025) - f(2020)}{f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right)} > 0$$

Δ4. Η f' είναι παραγωγίσιμη με: $f''(x) = (x^2 - 8x + 7)' = 2x - 8$

Για κάθε $x \geq -1$ με $x \neq 2$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - f''(x) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 8x + 7) - (2x - 8) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 10x - 16}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-8)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{3})(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-8)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{3}^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-8)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{(x+1-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-8)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x-8)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3}) = -12\sqrt{3} \end{aligned}$$

Επιμέλεια: Γαληνός Δημήτρης, Μαρκάκης Ιάσωνας

Ευχόμαστε καλά αποτελέσματα!